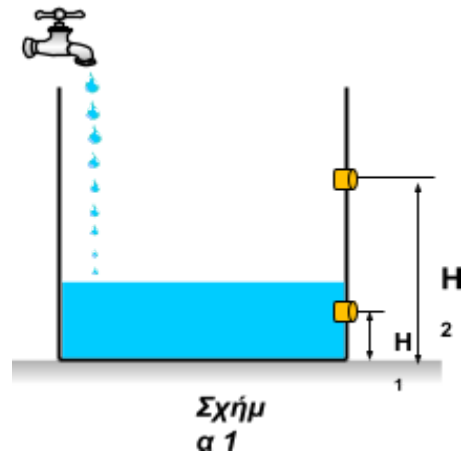


### Δυο τάπες έχει η δεξαμενή...

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται μία βρύση από την οποία εκρέει νερό με παροχή  $\Pi=10^{-3}\text{m}^3/\text{s}$ , σε ένα δοχείο. Το δοχείο έχει εμβαδό διατομής  $A_\Delta=10^{-1}\text{m}^2$  και στη μια παράπλευρη επιφάνειά του έχει δύο οπές που κλείνονται με τάπες και απέχουν,  $H_1=0,2\text{m}$  και  $H_2=1,2\text{m}$  αντίστοιχα, από τον πυθμένα. Οι τάπες είναι πανομοιότυπες με εμβαδό διατομής  $A_t=1,25\cdot 10^{-4}\text{m}^2$ , ίδιο με αυτό των οπών. Οι τάπες εμφανίζουν τριβές με τα τοιχώματα του δοχείου και η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής που μπορεί να ασκηθεί χωρίς να μετακινηθούν από την θέση τους είναι  $T_{\text{στ,max}}=1\text{N}$ .



Έστω  $t_0=0$  η στιγμή που η πρώτη ποσότητα ρευστού πέφτει στον πυθμένα του δοχείου.

**i.** Να γράψετε την χρονική εξίσωση της πίεσης στον πυθμένα για το χρονικό διάστημα από την στιγμή  $t_0=0$  μέχρι να εκσφενδονιστεί η πρώτη τάπα και να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση. Θεωρείστε ότι το νερό ισορροπεί συνεχώς στο δοχείο.

**ii.** Η στάθμη της δεξαμενής θα σταθεροποιηθεί τελικά σε κάποιο ύψος  $H$ . Να εξηγήσετε αν το ύψος  $H$  είναι:

- 1) *πάνω από τα 3,4 m*
- 2) *από 2 m μέχρι 3,4 m*
- 3) *από 1,2 m μέχρι 2 m*

**iii.** Υπήρξε κάποια στιγμή που ήταν ανοικτές και οι δύο οπές και το ρευστό που εξέρχεται από αυτές να πέφτει στο ίδιο σημείο στο έδαφος;

**iv.** Να γίνει ένα ποιοτικό διάγραμμα του ύψους του νερού στο δοχείο από τον πυθμένα του σε συνάρτηση με το χρόνο.

Δίνεται η πίεση της ατμόσφαιρας  $p_{\text{atm}}=10^5\text{Pa}$ , η πυκνότητα του νερού  $\rho_v=10^3\text{kg/m}^3$  και το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας  $|\vec{g}|=10\text{ m/s}^2$ . Θεωρήστε το εμβαδό της διατομής του δοχείου πολύ μεγαλύτερο από αυτό των οπών.

Θεωρείστε ότι η στάθμη κινείται πολύ αργά έτσι ώστε προσεγγιστικά οι ταχύτητες εκροής να υπολογίζονται από την σχέση του Torricelli.

$\sqrt{6}\approx 2,45$  και  $\sqrt{5}\approx 2,23$

## Απάντηση

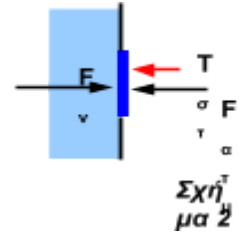
i)

Από την ισορροπία του πώματος όταν η στάθμη θα είναι  $y$  ψηλότερα από την οπή:

$$\vec{\Sigma F}_x = 0 \Rightarrow F_v - T_{\sigma\tau} - F_{l,atm} = 0 \Rightarrow p_v A_\tau - T_{\sigma\tau} - p_{atm} A_\tau = 0 \Rightarrow$$

$$(\rho_v g y + p_{atm}) A_\tau - T_{\sigma\tau} - p_{atm} A_\tau = 0 \Rightarrow \rho_v g h A_\tau = T_{\sigma\tau} \Rightarrow y = \frac{T_{\sigma\tau}}{\rho_v g A_\tau} \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{10^{-3} \cdot 10 \cdot 1,25 \cdot 10^{-4}} m \Rightarrow y = 0,8 m$$



Άρα σε απόσταση  $H=1m$  από τον πυθμένα.

Από την παροχή προκύπτει:

$$V = \Pi \cdot t_1 \rightarrow A_\Delta \cdot H = \Pi \cdot t_1 \rightarrow t_1 = A_\Delta \cdot H / \Pi \rightarrow$$

$$t_1 = 0,1 \cdot 1 / 10^{-3} s \rightarrow t_1 = 100 s$$

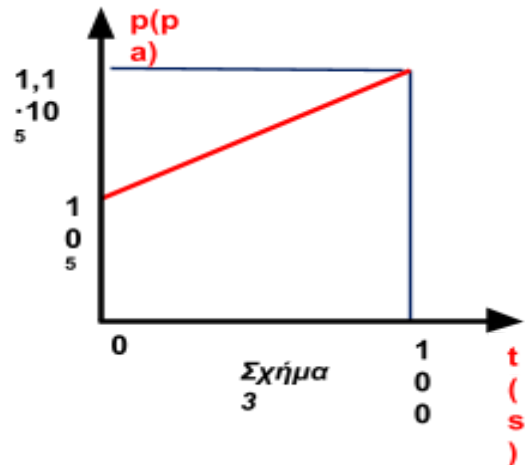
Το νερό θα ανέλθει σε ύψος  $H=1m$  τη χρονική στιγμή  $t_1=100s$ .

Έστω μια χρονική στιγμή  $t$  πριν από την  $t_1$  που το νερό βρίσκεται σε ύψος  $h$  από τον πυθμένα. Η πίεση θα ισούται με  $p = p_{atm} + \rho_v \cdot g \cdot h$

$$\text{Από την παροχή } V = \Pi \cdot t \rightarrow A_\Delta \cdot h = \Pi \cdot t \rightarrow h = \Pi \cdot t / A_\Delta$$

$$\text{Έτσι } p = p_{atm} + \rho_v \cdot g \cdot \Pi \cdot t / A_\Delta \rightarrow$$

$$p = 10^5 + 100 \cdot t, \quad 0 \leq t \leq 100 s$$



ii)

Για να ανοίξει η δεύτερη τάπα σύμφωνα με το (i) ερώτημα θα πρέπει το νερό να ανέβει 0,8m πάνω από τη δεύτερη τρύπα.

Μόλις το νερό ανέλθει σε ύψος  $h=1m$  από το έδαφος εκσφενδονίζεται η τάπα από την πρώτη τρύπα και εκρέει νερό με ταχύτητα  $v_1$  που σύμφωνα με την προσέγγιση του θεωρήματος Torricelli ισούται με  $v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot 0,8} = 4 m/s$ . Η παροχή από την τρύπα είναι  $\Pi_{t1} = A_\tau \cdot v_1 = 5 \cdot 10^{-4} m^3/s$  και επειδή  $\Pi_{t1} < \Pi$  η στάθμη του νερού θα συνεχίσει να ανεβαίνει, (όχι με σταθερό ρυθμό) και ταυτόχρονα να εκρέει νερό από την οπή.

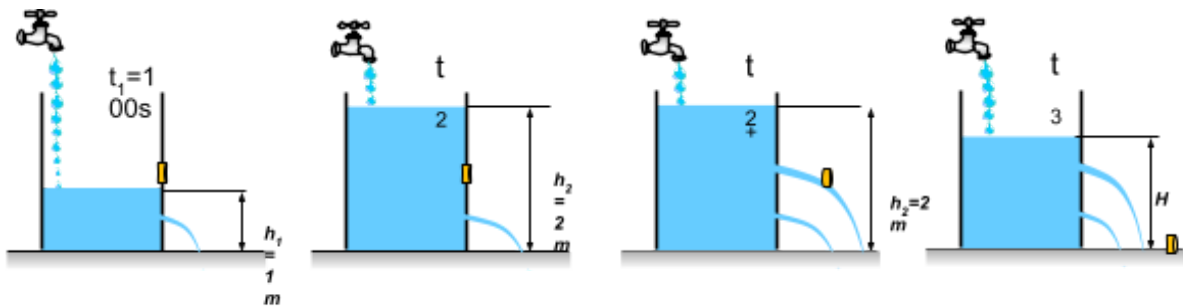
Κατόπιν θα υπολογίσουμε το ύψος που σταθεροποιείται το νερό υποθέτοντας ότι δεν φεύγει η δεύτερη τάπα.

$$\Pi = \Pi_{t1} \rightarrow 10^{-3} = 1,25 \cdot 10^{-4} \cdot v \rightarrow v = 8 \rightarrow \sqrt{2 \cdot g \cdot d_1} = 8 \rightarrow d_1 = 3,2 m \text{ από την ελεύθερη επιφάνεια}$$

δηλαδή 3,4m από τον πυθμένα. Όμως δεν μπορεί να συμβεί καθώς σε απόσταση  $d=0,8m$  πάνω από την θέση της δεύτερης οπής δηλαδή 2m από τον πυθμένα θα εκσφενδονιστεί η δεύτερη τάπα και θα

εκρέει νερό. Έτσι το νερό θα ισορροπήσει με ανοιχτές τις δύο οπές άρα σε ύψος μεγαλύτερο από 1,2m από τον πυθμένα.

Τη στιγμή που το νερό φτάνει σε ύψος 0,8 πάνω από την δεύτερη τάπα και την εκσφενδονίζει η ελεύθερη επιφάνεια του νερού απέχει από την πρώτη οπή  $\Delta y = 1,8\text{m}$  και η ταχύτητα εκροής τη στιγμή αυτή είναι  $v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot 1,8} = 6\text{m/s}$ . Η παροχή του εκρεόμενου νερού είναι  $\Pi_{t1} = A_t \cdot v = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{m}^3/\text{s}$  και επειδή είναι μικρότερη από την παροχή της βρύσης  $\Pi = 10^{-3} \text{m}^3/\text{s}$  το νερό θα τείνει να ανέλθει πάνω από αυτό το ύψος, αλλά τότε, την αμέσως επόμενη στιγμή θα εκσφενδονιστεί και η δεύτερη τάπα. Οι ταχύτητες εκροής από τις οπές θα είναι  $v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot 1,8} = 6\text{m/s}$  και  $v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot 0,8} = 4\text{m/s}$ . Ενώ η συνολική παροχή του εκρεόμενου νερού είναι  $\Pi_{t1} + \Pi_{t2} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{m}^3/\text{s} + 5 \cdot 10^{-4} \text{m}^3/\text{s} = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{m}^3/\text{s} > \Pi$ . Έτσι θα εκρέει περισσότερο νερό από ότι εισέρχεται και η στάθμη θα χαμηλώνει έως ότου  $\Pi = \Pi_{t1} + \Pi_{t2}$ . Τελικά το νερό θα ισορροπήσει πάνω από τη δεύτερη τρύπα σε ύψος  $H$  μεγαλύτερο από 1,2m και μικρότερο από 2m.



Σχήμα  
4

iii)

Οι φλέβες όταν πέσουν στο ίδιο σημείο θα έχουν ίδιο βεληνεκές.

$$S_1 = S_2 \rightarrow \sqrt{2 \cdot g \cdot y_1} \cdot t_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot y_2} \cdot t_2 \rightarrow$$

$$\sqrt{2 \cdot g \cdot y_1} \cdot \sqrt{\frac{2H_1}{g}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot y_2} \cdot \sqrt{\frac{2H_2}{g}} \rightarrow$$

$$2\sqrt{y_1 \cdot H_1} = 2\sqrt{y_2 \cdot H_2} \rightarrow y_1 \cdot H_1 = y_2 \cdot H_2 \rightarrow$$

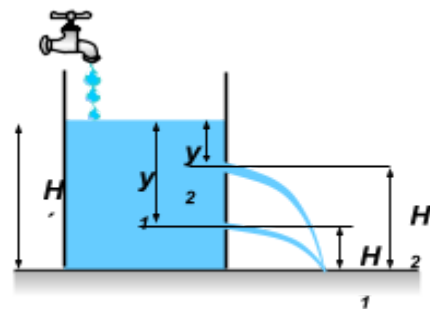
$$(H' - H_1)H_1 = (H' - H_2)H_2 \rightarrow$$

$$H' \cdot H_1 - H_1^2 = H' \cdot H_2 - H_2^2 \rightarrow$$

$$H' \cdot H_1 - H' \cdot H_2 = H_1^2 - H_2^2 \rightarrow$$

$$H'(H_1 - H_2) = (H_1 - H_2)(H_1 + H_2) \xrightarrow{H_1 \neq H_2} \rightarrow$$

$$H' = H_1 + H_2 = 1,4\text{m} \quad (1)$$



Σχήμα  
α 5

Προκύπτει επιπλέον ότι  $y_1 + y_2 = (H' - H_1) + (H' - H_2) \rightarrow y_1 + y_2 = 2H' - (H_1 + H_2) \rightarrow$

$$y_1 + y_2 = 2H' - H' \rightarrow y_1 + y_2 = H' = 1,4\text{m} \quad (2)$$

Η στάθμη μετά το άνοιγμα της οπής 2 όταν το νερό έχει φτάσει σε ύψος 2m από τον πυθμένα κατεβαίνει. Αν στο ύψος  $H'=1,4\text{m}$  προκύπτει η εκρεόμενη παροχή από τις τρύπες, να είναι μικρότερη της εισερχόμενης από την βρύση, τότε το νερό θα έχει σταθεροποιηθεί πιο ψηλά και συνεπώς δεν θα υπάρξει στιγμή που οι φλέβες θα έχουν ίδιο βεληνεκές, στην αντίθετη περίπτωση θα υπάρξει.

Από τα παραπάνω προκύπτει:

$$y_1=1,2\text{m} \rightarrow v_1=\sqrt{2\cdot g\cdot y_1}=2\sqrt{6}\text{m/s}=4,9\text{m/s} \text{ και η παροχή } \Pi_1=A_t\cdot v_1=6,125\cdot 10^{-4}\text{m}^3/\text{s}.$$

$$y_2=0,2\text{m} \rightarrow v_2=\sqrt{2\cdot g\cdot y_2}=2\text{m/s} \text{ και η παροχή } \Pi_2=A_t\cdot v_2=2,5\cdot 10^{-4}\text{m}^3/\text{s}.$$

Επειδή  $\Pi_{t1}+\Pi_{t2}<\Pi$  το νερό θα έχει σταθεροποιηθεί ψηλότερα και δεν θα υπάρξει στιγμή που οι φλέβες θα πέσουν στο ίδιο σημείο.

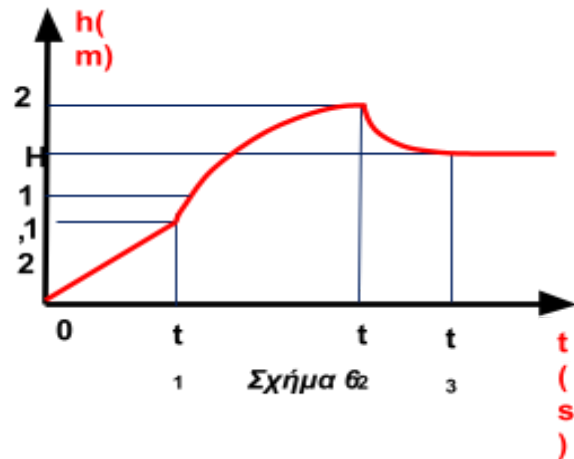
iv)

Αρχικά το ύψος του νερού αυξάνεται γραμμικά μέχρι να εκτοξευθεί η πρώτη τάπα.

Από την παροχή προκύπτει:

$$V=\Pi\cdot t \rightarrow A_{\Delta}\cdot h=\Pi\cdot t_1 \rightarrow h=\Pi\cdot t_1/A_{\Delta} \rightarrow h=10^{-2}\cdot t, \quad 0\leq t\leq 100\text{s}$$

Μετά τη χρονική στιγμή  $t_1$  το νερό εκρέει από την τρύπα 1 και το ύψος του νερού θα αυξάνεται με μειούμενο ρυθμό καθώς αυξάνεται η ταχύτητα εκροής και συνεπώς και η παροχή εκροής.



Μετά την χρονική στιγμή  $t_2$  η εκρεόμενη παροχή είναι μεγαλύτερη από την εισερχόμενη και η στάθμη του νερού θα κατεβαίνει. Η ελεύθερη επιφάνεια του νερού θα κατεβαίνει με μειούμενο ρυθμό καθώς η εκρεόμενη παροχή ελαττώνεται συνεχώς, δεδομένου ότι ελαττώνονται οι ταχύτητες εκροής από τις οπές με την πτώση της στάθμης του νερού.

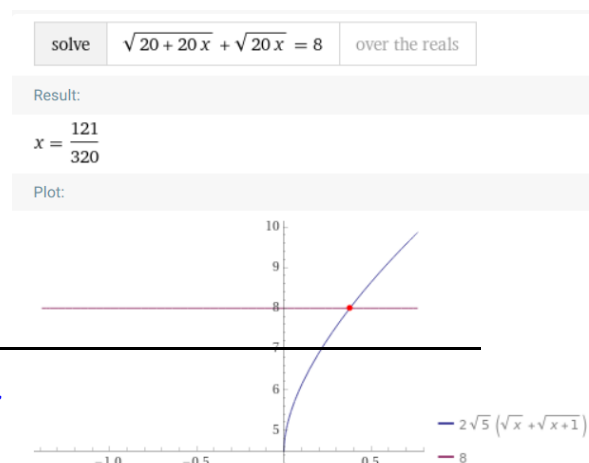
Κάποια χρονική στιγμή  $t_3$  η στάθμη του νερού θα ισορροπήσει όταν  $\Pi=\Pi_{t1}+\Pi_{t2}$  σε κάποιο ύψος  $H$  από τον πυθμένα.

### Σχόλιο

Έστω ότι το νερό θα σταθεροποιηθεί σε ύψος  $d$  πάνω από τη δεύτερη τρύπα. Τότε η ταχύτητα εκροής από την πρώτη θα είναι:

$$v_1=\sqrt{2\cdot g\cdot (h_{t1-t2}+d)} \text{ και από την δεύτερη οπή } v_2=\sqrt{2\cdot g\cdot d}$$

Έτσι



$$\begin{aligned}\Pi &= \Pi_{\tau_1} + \Pi_{\tau_2} \rightarrow \\ 10^{-3} &= 1,25 \cdot 10^{-4} [\sqrt{(2 \cdot 10 \cdot (1+d))} + \sqrt{(2 \cdot 10 \cdot d)}] \rightarrow \\ 8 &= \sqrt{20 + 20d} + \sqrt{20 \cdot d}\end{aligned}$$

Με χρήση του wolfram το ύψος πάνω από τη δεύτερη οπή που θα στεθεροποιηθεί το νερό είναι  $d = 121/320 \text{ m} = 0,378125 \text{ m}$  δηλαδή σε ύψος  $H = 1,578125 \text{ m}$  από τον πυθμένα.