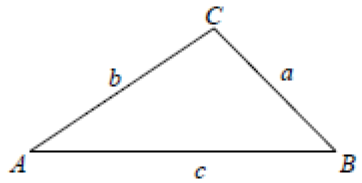
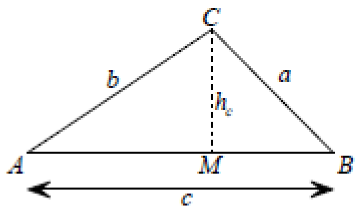
DEMOSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS DEL SENO Y EL COSENO

Demostración del teorema del seno

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td><u>Teorema del seno</u>:
Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Como <u>consecuencia</u>:
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}=2R$$
donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC .</td>
</tr>
</table>

Trazamos una de las alturas, por ejemplo la correspondiente al vértice C, h_C, en el triángulo ABC, obteniendo los triángulos rectángulos AMC y MBC, donde M es el punto es el punto en el que dicha altura corta al lado AB.



En el triángulo AMC:

$$\operatorname{sen}\widehat{A}=\frac{h_C}{b}\rightarrow h_C=b\cdot\operatorname{sen}\widehat{A}$$

En el triángulo MBC:

$$\operatorname{sen}\widehat{B}=\frac{h_C}{a}\rightarrow h_C=a\cdot\operatorname{sen}\widehat{B}$$

Igualamos los resultados obtenidos para h_c :

$$b\cdot\operatorname{sen}\widehat{A}=a\cdot\operatorname{sen}\widehat{B}$$

lo que podemos expresar como

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}$$

Si repetimos el proceso con la altura h_A, obtendríamos:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$$

que es lo que queríamos probar.

Demostración del teorema del coseno

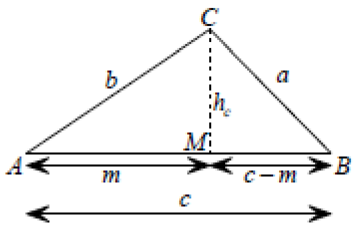
Teorema del coseno:
El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$

Trazamos una de las alturas, por ejemplo la correspondiente al vértice C, h_C, en el triángulo ABC, obteniendo los triángulos rectángulos AMC y MBC, donde M es el punto en el que dicha altura corta al lado AB.



En el triángulo AMC:

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{h_C}{b} \rightarrow h_C = b \cdot \operatorname{sen}\widehat{A}$$

En el triángulo MBC:

$$\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{h_C}{a} \rightarrow h_C = a \cdot \operatorname{sen}\widehat{B}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo MBC:

$$a^2 = (c-m)^2 + h_C{}^2$$

Ahora bien, como $h_C = b \cdot sen\widehat{A}$ y $m = b \cdot cos\widehat{A}$, se tiene que

$$a^2 = (c-m)^2 + h_C{}^2 = \left(c - b\cdot\cos\widehat{A}\right)^2 + \left(b\cdot\operatorname{sen}\widehat{A}\right)^2 =$$

$$= c^2 - 2cb\cdot\cos\widehat{A} + b^2\cdot\cos^2\widehat{A} + b^2\cdot\operatorname{sen}^2\widehat{A} = c^2 - 2cb\cdot\cos\widehat{A} + b^2\left(\cos^2\widehat{A} + \operatorname{sen}^2\widehat{A}\right) =$$

$$= c^2 + b^2 - 2cb\cdot\cos\widehat{A}$$

De forma análoga se obtendrían las otras dos igualdades.
Que es lo que queríamos probar.