

О комплексных числах

Одна из причин введения рациональных чисел обусловлена требованием, чтобы всякое линейное уравнение $ax = b$ (где $a \neq 0$) было разрешимо. В области целых чисел линейное уравнение разрешимо лишь в том случае, когда b делится нацело на a .

Одна из причин расширения множества рациональных чисел до множества действительных чисел была связана с разрешимостью квадратных уравнений, например, уравнения вида $x^2 = 2$. На множестве рациональных чисел это уравнение не разрешимо, так как среди рациональных нет числа, квадрат которого равен двум. Как известно, – число иррациональное. На множестве же действительных чисел уравнение $x^2 = 2$ разрешимо, оно имеет два решения $x_1 = \sqrt{2}$ и $x_2 = -\sqrt{2}$.

И все же нельзя считать, что на множестве действительных чисел разрешимы все квадратные уравнения. Например, квадратное уравнение $x^2 = -1$ на множестве действительных чисел решений не имеет, так как среди действительных чисел нет такого числа, квадрат которого отрицателен.

Таким образом, действительных чисел явно недостаточно, чтобы построить такую теорию квадратных уравнений, в рамках которой каждое квадратное уравнение было бы разрешимо. Это соображение приводит к необходимости вводить новые числа и расширять множество действительных чисел до множества комплексных чисел, в котором было бы разрешимо любое квадратное уравнение.

Вспомним о едином принципе расширения числовых систем и поступим в соответствии с этим принципом. Если множество A расширяется до множества B , то должны быть выполнены следующие условия:

1. Множество A есть подмножество B .
2. Отношения элементов множества A (в частности, операции над ними) определяются также и для элементов множества B ; смысл этих отношений для элементов множества A , рассматриваемых уже как элементы множества B , должен совпадать с тем, какой они имели в A до расширения.
3. В множестве B должна выполняться операция, которая в A была невыполнима или не всегда выполняема.
4. Расширение B должно быть минимальным из всех расширений данного множества A , обладающих первыми тремя свойствами, причем это расширение B должно определяться множеством A однозначно (с точностью до изоморфизма).

Итак, расширяя множество действительных чисел до множества новых чисел, названных комплексными, необходимо, чтобы:

- а) комплексные числа подчинялись основным свойствам действительных чисел, в частности, коммутативному, ассоциативному и дистрибутивному законам;
- б) в новом числовом множестве были разрешимы любые квадратные уравнения.

Множество действительных чисел недостаточно обширно, чтобы в нем были бы разрешимы все квадратные уравнения. Поэтому, расширяя множество действительных чисел до множества комплексных чисел, мы потребуем, чтобы в нем можно было бы построить полную и законченную теорию квадратных уравнений. Другими словами, мы расширим множество действительных чисел до такого множества, в котором можно будет решить любое квадратное уравнение. Так, уравнение $x^2 = -1$ не имеет решений во множестве действительных чисел потому, что квадрат действительного числа не может быть отрицательным. В новом числовом множестве оно должно иметь решение. Для этого вводится такой специальный символ i , называемый мнимой единицей, квадрат которого равен -1 .

Ниже будет показано, что введение этого символа позволит осуществить расширение множества действительных чисел, пополнив его мнимыми числами вида bi (где b – действительное число) таким образом, чтобы в новом числовом множестве (множестве комплексных чисел) при сохранении основных законов действительных чисел были разрешимы любые квадратные уравнения.

В связи с развитием алгебры потребовалось ввести сверх прежде известных положительных и отрицательных чисел числа нового рода. Они называются комплексными. Комплексное число имеет вид $a + bi$; здесь a и b – действительные числа, а i – число нового рода, называемое мнимой единицей. «Мнимые» числа составляют частный вид комплексных чисел (когда $a = 0$). С другой стороны, и действительные (т.е. положительные и отрицательные) числа являются частным видом комплексных чисел (когда $b = 0$).

Действительное число a назовем абсциссой комплексного числа $a + bi$; действительное число b – ординатой комплексного числа $a + bi$; Основное свойство числа i состоит в том, что произведение $i \cdot i$ равно -1 , т.е.

$$i^2 = -1 \quad (1)$$

Долгое время не удавалось найти такие физические величины, над которыми можно выполнять действия, подчинённые тем же правилам, что и действия над комплексными числами – в частности правилу (1). Отсюда названия: «мнимая единица», «мнимое число» и т.п. В настоящее время, известен целый ряд таких физических величин, и комплексные числа широко применяются не только в математике но также в физике и технике (теория упругости, электротехника, аэродинамика и др.).

Правило каждого действия над комплексными числами выводится из определения этого действия. Но определения действий над комплексными числами не вымышлены произвольно, а установлены с таким расчетом, чтобы они согласовывались с правилами действий над вещественными числами. Ведь комплексные числа должны рассматриваться не в отрыве от действительных, а совместно с ними.

Основные соглашения о комплексных числах

1. Действительное число a записывается также в виде $a + 0 \cdot i$ (или $a - 0 \cdot i$)

Примеры. Запись $3 + 0 \cdot i$ обозначает то же, что запись 3 . Запись $-2 + 0 \cdot i$ означает -2 . Запись

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot i \quad \text{означает} \quad \frac{3\sqrt{2}}{2} .$$

Замечание. Аналогично мы поступаем и в обычной арифметике: запись 002 обозначает то же, что запись 5 . Запись 002 – то же, что 2 , и т. п.

2. Комплексное число вида $0 + bi$ называется «чисто мнимым». Запись bi обозначает то же, что $0 + bi$.

3. Два комплексных числа $a + bi$, $a' + b'i$ считаются равными, если у них соответственно равны абсциссы и ординаты, т. е. если $a = a'$, $b = b'$. В противном случае комплексные числа не равны. Это определение подсказываете следующим соображением. Если бы могло существовать скажем, такое равенство: $2 + 5i = 8 + 2i$, то по правилам алгебры мы имели бы $i = 2$, тогда как i не должно быть действительным числом.

Замечание. Мы еще не определили, что такое сложение комплексных чисел. Поэтому, строго говоря еще не вправе утверждать, что число $2 + 5i$ есть сумма чисел 2 и $5i$. Точнее было бы сказать, что у нас есть пара действительных чисел: 2 (абсцисса) и 5 (ордината); эти числа порождают число нового рода, условно обозначаемое $2 + 5i$.

Сложение комплексных чисел

Определение. Суммой комплексных чисел $a + bi$ и $a' + b'i$ называют комплексное число $(a + a') + (b + b')i$.

Это определение подсказывается правилами действий с обычными многочленами.

Пример 1. $(-3 + 5i) + (4 - 3i) = 1 - 3i$

Пример 2. $(2 + 0i) + (7 + 0i) = 9 + 0i$. Так как запись $2 + 0i$ означает то же что и 2 и т. д., то выполненное действие согласуется с обычной арифметикой ($2 + 7 = 9$).

Пример 3. $(0 + 2i) + (0 + 5i) = 0 + 7i$, т.е. $2i + 5i = 7i$.

Пример 4. $(-2 + 3i) + (-2 - 3i) = -4$.

В примере 4 сумма двух комплексных чисел равна действительному числу. Два комплексных числа $a + bi$ и $a' - b'i$ называются сопряженными. Сумма сопряженных комплексных чисел равна действительному числу $2a$.

Замечание. Теперь, когда действие сложения определено, мы имеем право рассматривать комплексное число $a + bi$ как сумму чисел a и bi . Так как число 2 (которое мы условно записываем $2 + 0i$) и число $5i$ (которое означает то же число, что и $0 + 5i$) в сумме дают $2 + 5i$.

Вычитание комплексных чисел

Определение. Разностью комплексных чисел $a + bi$ (уменьшаемое) и $a' - b'i$ (вычитаемое) называется комплексное число $(a - a') + (b + b')i$.

Пример 1. $(-5 + 2i) - (3 - 5i) = -8 + 7i$

Пример 2. $(3 + 2i) - (-3 + 2i) = 6 + 0i = 6$.

Пример 3. $(3 - 4i) - (3 + 4i) = -8i$.

Замечание. Вычитание комплексных чисел можно определить так же, как действие обратное сложению. Именно мы ищем такое комплексное число $x + yi$ (разность), чтобы $(x + yi) + (a' + b'i) = a + bi$. Согласно определению имеем:

$$(x + a') + (y + b') \cdot i = a + bi.$$

Согласно условию равенства комплексных чисел

$$x + a' = a, \quad y + b' = b$$

Из этих уравнений находим $x = a - a'$, $y = b - b'$.

Умножение комплексных чисел

Определение умножения комплексных чисел устанавливается с таким расчетом, чтобы 1) числа $a + bi$ и $a' + b'i$ можно было перемножать, как алгебраические двучлены, и чтобы 2) число i обладало свойством $i^2 = -1$. В силу требования 1) произведение $(a + bi) \cdot (a' + b'i)$ должно равняться $aa' + (ab' + ba')i + bb'i^2$, а в силу требования 2) это выражение должно равняться $(aa' - bb') + (ab' + ba')i$. В соответствии с этим устанавливается следующее определение.

Определение. Произведением комплексных чисел $a + bi$ и $a' + b'i$ называется комплексное число

$$(aa' - bb') + (ab' + ba')i$$

Замечание 1. Равенство $i^2 = -1$ до установленного правила умножения комплексных чисел носило характер требования. Теперь оно вытекает из определения. Ведь запись i^2 , т. е. $i \cdot i$, равнозначна записи $(0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i)$. Здесь $a = 0$, $b = 1$, $a' = 0$, $b' = 1$. Имеем $aa' - bb' = -1$, $ab' - ba' = 0$, так что произведение есть $-1 + 0 \cdot i$, т. е. -1 .

Замечание 2. На практике нет нужды пользоваться формулой произведения. Можно перемножить данные числа, как двучлены, а затем положить, что $i^2 = -1$.

Пример 1. $(1 - 2i) \cdot (3 + 2i) = 3 - 6i + 2i + 4 = 7 - 4i$.

Пример 2. $(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$.

Пример 2 показывает, что произведение сопряженных комплексных чисел есть действительное и притом положительное число.

Деление комплексных чисел

В соответствии с определением деления действительных чисел устанавливается следующее определение.

Определение. Разделить комплексное число $a + bi$ (делимое) на комплексное число $a' + b'i$ (делитель) – значит найти такое число $x + yi$ (частное), которое, будучи помножено на делитель, даст делимое.

Если делитель не равен нулю, то деление всегда возможно, и частное единственно (доказательство смотри в замечании 2). На практике частное удобнее всего находить следующим образом.

Пример 1. Найти частное $(7 - 4i) : (3 + 2i)$

Записав дробь $(7 - 4i)/(3 + 2i)$ расширяем её на число $(3 - 2i)$, сопряженное с $(3 + 2i)$. Получим:

$$\frac{(7 - 4i) \cdot (3 - 2i)}{(3 + 2i) \cdot (3 - 2i)} = \frac{13 - 26i}{13} = 1 - 2i$$

Пример 2.

$$\frac{-2 + 5i}{-3 - 4i} = \frac{(-2 + 5i)(-3 + 4i)}{(-3 - 4i)(-3 + 4i)} = \frac{-14 - 23i}{25} = -0,56 - 0,92i.$$

Пример 3.

$$\frac{-6 + 21i}{4 - 14i} = \frac{3}{2}$$

Здесь проще всего сократить на $(-2 + 7i)$.

Проступая, как в примерах 1 и 2, найдем общую формулу:

$$(a + bi) : (a' + b'i) = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{a'b - b'a}{a'^2 + b'^2}i. \quad (1)$$

Чтобы доказать, что правая часть действительно является частным, достаточно помножить её на $a + bi$. Получим $a' + b'i$.

Замечание 1. Формулу (1) можно было принять за определение деления.

Замечание 2. Формулу (1) можно вывести ещё следующим образом. Согласно определению мы должны иметь: $(a' + b'i) \cdot (x + yi) = (a + bi)$. Значит, должны удовлетворяться следующие два уравнения:

$$a'x - b'y = a; \quad b'x + a'y = b \quad (2)$$

Эта система имеет единственное решение:

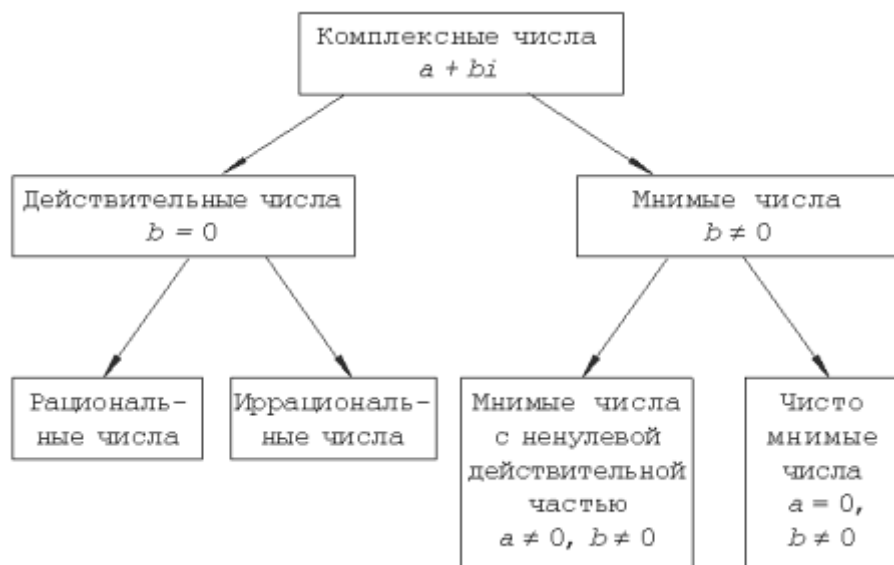
$$x = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}; \quad y = \frac{a'b - b'a}{a'^2 + b'^2},$$

Если $\frac{a'}{b'} \neq -\frac{b'}{a'}$, т.е. если $a'^2 + b'^2 \neq 0$.

Остается рассмотреть случай $a'^2 + b'^2 = 0$. Он возможен лишь тогда, когда $a' = 0$ и $b' = 0$, т. е. когда делитель $a + bi$ равен нулю. Если при этом и делимое $a + bi$ равно нулю, то частное неопределено. Если же делимое не равно нулю, то частное не существует (говорят, что оно равно бесконечности).

Опираясь на введенные определения нетрудно проверить, что для комплексных чисел справедливы коммутативный, ассоциативный и дистрибутивный законы. Кроме того, применение операций сложения, умножения, вычитания и деления к двум комплексным числам снова приводит к комплексным числам. Тем самым можно утверждать, что множество комплексных чисел образует поле. При этом, так как комплексное число $a + bi$ при $b = 0$ отождествляется с действительным числом $a = a + 0i$, то поле комплексных чисел включает поле действительных чисел в качестве подмножества.

Приведем классификацию комплексных чисел:



Решение квадратных уравнений

Одна из причин введения комплексных чисел состояла в том, чтобы добиться разрешимости любого квадратного уравнения, в частности уравнения $x^2 = -1$.

Покажем, что расширив поле действительных чисел до поля комплексных чисел, мы получили поле, в котором каждое квадратное уравнение разрешимо, т.е. имеет решение. Так, уравнение $x^2 = -1$ имеет два решения: $x_1 = i$, $x_2 = -i$.

Это нетрудно установить проверкой: $i \cdot i = i^2 = -1$, $(-i) \cdot (-i) = i^2 = -1$.

Перейдем теперь к вопросу о решении полного квадратного уравнения. Квадратным уравнением называют уравнение вида: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$),

где x – неизвестная, a , b , c – действительные числа, соответственно первый, второй коэффициенты и свободный член, причем $a \neq 0$. Решим это уравнение, выполнив над ним ряд несложных преобразований.

Разделим все члены уравнения на $a \neq 0$ и перенесем свободный член в правую часть уравнения:

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$. К обеим частям уравнения прибавим выражение $\frac{b^2}{4a^2}$ с тем, чтобы левая его часть представляла полный квадрат суммы двух слагаемых:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Извлечем корень квадратный из обеих частей уравнения:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Найдем значения неизвестной:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Теперь можно исследовать полученное решение. Оно зависит от значения подкоренного выражения, называемого дискриминантом квадратного уравнения. Если $b^2 - 4ac > 0$, то

$b^2 - 4ac > 0$, то $\sqrt{b^2 - 4ac}$ есть действительное число и квадратное уравнение имеет действительные корни. Если же

$b^2 - 4ac < 0$, то $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-(4ac - b^2)} = \sqrt{4ac - b^2} i$ – мнимое число, квадратное уравнение имеет мнимые корни.

Результаты исследования представлены ниже в таблице:

Значение дискриминанта $b^2 - 4ac$	Корни уравнения
$b^2 - 4ac > 0$	Уравнение имеет два различных действительных корня: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$b^2 - 4ac = 0$	Уравнение имеет два равных действительных корня: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$b^2 - 4ac < 0$	Уравнение имеет два различных мнимых корня: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} i}{2a};$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac} i}{2a},$ корни – сопряженные комплексные числа

Итак, введение комплексных чисел позволяет разработать полную теорию квадратных уравнений. В поле комплексных чисел разрешимо любое квадратное уравнение.

Примеры.

1. Решите уравнение $x^2 - 2x - 8 = 0$.

Решение. Найдем дискриминант $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36 > 0$.

Уравнение имеет два действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{36}}{2} = 4;$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{36}}{2} = -2.$$

2. Решите уравнение $x^2 + 6x + 9 = 0$.

Решение. $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$, уравнение имеет два равных действительных корня:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3.$$

3. Решите уравнение $x^2 - 4x + 5 = 0$.

Решение. $D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$, уравнение имеет мнимые корни:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2};$$

$$x_1 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i; \quad x_2 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i.$$

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Известно, что отрицательные числа были введены в связи с решением линейных уравнений с одной переменной. В конкретных задачах отрицательный ответ истолковывался как значение направленной величины (положительные и отрицательные температуры, передвижения в противоположных направлениях, прибыль и долг и т.п.). Однако еще в XVI веке многие математики не признавали отрицательных чисел. Только с введением координатной прямой и координатной плоскости отчетливо проявился смысл отрицательных чисел, и они стали такими же «равноправными» и понятными, как и натуральные числа. Аналогично обстоит дело с комплексными числами. Смысл их отчетливо проявляется при введении их геометрической интерпретации.

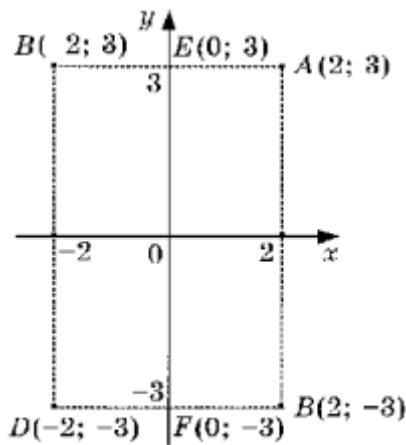


Рис. 1

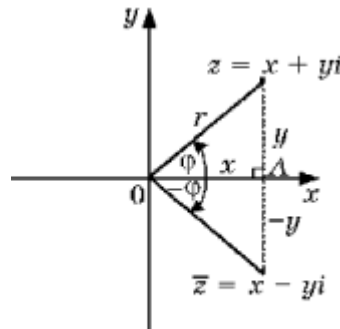


Рис. 2

Геометрическая интерпретация комплексных чисел состоит в том, что каждому комплексному числу $z = x + yi$ ставится в соответствие точка (x, y) координатной плоскости таким образом, что действительная часть комплексного числа представляет собой абсциссу, а коэффициент при мнимой части – ординату точки.

Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством точек координатной плоскости. Подобным образом было установлено соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек числовой прямой.

На рисунке 1 изображена координатная плоскость. Числу $2 + 3i$ соответствует точка $A(2, 3)$ плоскости; числу $2 - 3i$ – точка $B(2, -3)$; числу $-2 + 3i$ – точка $C(-2, 3)$; числу $-2 - 3i$ – точка $D(-2, -3)$. Числу $3i$ соответствует точка $E(0, 3)$; а числу $-3i$ – точка $F(0, -3)$. Итак, каждому комплексному числу соответствует единственная точка координатной плоскости и, наоборот, каждой точке координатной плоскости соответствует единственное комплексное число, при этом двум различным комплексным числам соответствуют две различные точки координатной плоскости. Ясно, что действительным числам $x + 0i$ соответствуют точки оси абсцисс, а чисто мнимым числам $0 + yi$, где $y \in \mathbb{R}$ – точки оси ординат. Поэтому ось Oy называют мнимой, а ось Ox – действительной. Сопряженным комплексным числам

$$z = x + yi \text{ и } \bar{z} = x - yi$$

соответствуют точки, симметричные относительно оси абсцисс (рис. 2).

http://mat.1september.ru/2001/10/no10_1.htm