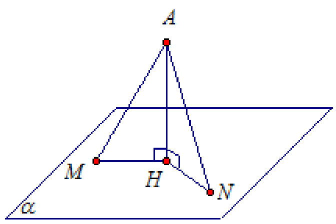
Дисциплина: ОД.07 Математика
Занятие № 46 **Группа ТТГ 1/1-9/25** **Дата: 19.11.2025**
Тип занятия: лекция 27 **Преподаватель:** Бережная В.А.
Тема занятия: Углы между прямыми и плоскостями

Цель занятия:
Деятельностная:
– создать условия для усвоения учащимися умения определять и измерять углы между прямыми и плоскостями в пространстве.
Содержательная:
– сформировать целостное представление об углах между различными геометрическими объектами в пространстве;
– расширить знания обучающихся при усвоении материала о перпендикулярах и наклонных;
– изучить методы нахождения расстояний в пространстве;
– сформировать навыки применения теоретических знаний при решении практических задач.
План занятия:
1. Перпендикуляр и наклонные.
2. Расстояние от точки до плоскости, расстояние от прямой до плоскости

Ход занятия

1. Перпендикуляр и наклонная (повторение)

Рассмотрим плоскость α. Точка A лежит вне плоскости α. Отрезок AH перпендикулярен плоскости α.



Отрезок AH – перпендикуляр, проведенный из точки A к плоскости α. Точка H – основание перпендикуляра.

Отрезок AM – наклонная, M – основание наклонной.

Отрезок MH называется проекцией наклонной AM на плоскость α.

Некоторые свойства проекций наклонных:

У равных наклонных, проведённых к плоскости из одной точки, проекции равны.

Из двух наклонных, проведённых к плоскости из одной точки, больше та, у которой проекция больше.

Если из данной точки к данной плоскости провести несколько наклонных, то большей наклонной соответствует большая проекция.

Свойство 1. Длина перпендикуляра меньше, чем длина наклонной. То есть, AH < AM.

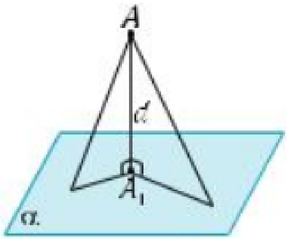
Расстоянием от точки A до плоскости α называют длину перпендикуляра AH. Обозначение: ρ(A; α) = AH. Точка H – проекция точки A на плоскость α.

Свойство 2. $AM = AN \Leftrightarrow MH = HN$

То есть, если из точки A проведены равные наклонные, AM = AN, то их проекции равны: MH = HN. Если проекции равны MH = HN, то равны и наклонные: AM = AN.

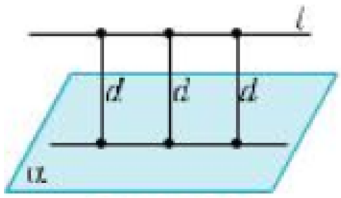
2. Расстояние от точки до плоскости, расстояние от прямой до плоскости

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту плоскость. Если фигуры пересекаются, то будем считать, что расстояние между ними равно нулю.



Теорема 1 (о расстоянии от точки до плоскости).

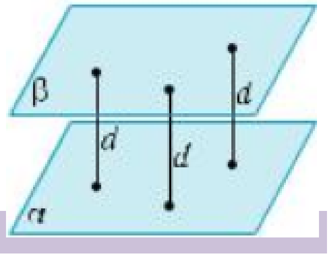
Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, проведенного из данной точки на данную плоскость.



Теорема 2 (о расстоянии между прямой и плоскостью). Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно длине перпендикуляра, проведенного из произвольной точки прямой к данной плоскости.

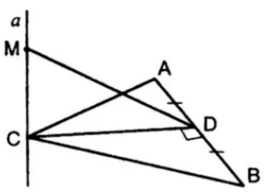
Теорема 3 (о расстоянии между параллельными плоскостями).

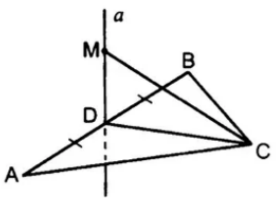
Расстояние между параллельными плоскостями равно длине перпендикуляра, проведенного из произвольной точки одной плоскости ко второй плоскости.



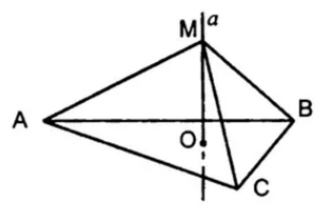
Задачи с решением

Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, которая лежит в данной плоскости. Перпендикулярность прямой и плоскости обозначается как a⊥α.

<table>
<tr><th colspan="2">Задача 1</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Дано: угол ACB = 90°
AC = 4; MD = 3
Найти: MC
Решение
В равнобедренном прямоугольнике ABC:</td></tr>
<tr><td colspan="2">AB = 4√2, тогда CD = 2√2
П о т Пифагора из прямоугольного треугольника ΔMCD: MC = 1
Ответ: 1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Задача 2</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Дано: ΔABC – равносторонний.
$AB = 2\sqrt{3}$. MD=4.
Найти MC.
Решение</td></tr>
<tr><td colspan="2">ΔABC – равносторонний, $CD = \dfrac{AC\sqrt{3}}{2} = 3$. Из прямоугольного ΔMCD CM = 5.
Ответ: 5</td></tr>
</table>

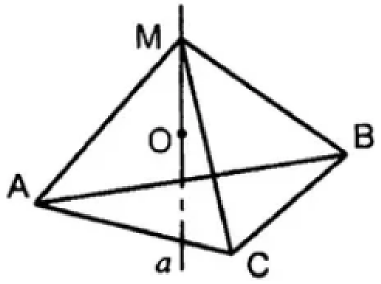
Задача 3



Дано: ΔABC – равносторонний.
$AB = 4\sqrt{3}$. O – центр окружности, описанной около ΔABC. MO=3.
Найти MB.

Решение:
ΔАВС – равносторонний, ОВ – радиус окружности описанной около треугольника, значит, $\dfrac{AC}{sin(ABC)} = 2OB,\ OB = 4$. И з прямоугольного ΔМОВ: МВ=5
Ответ: 5

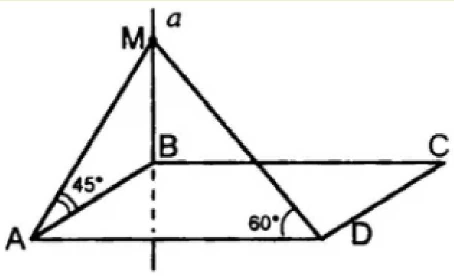
Задача 4



Дано: O – центр окружности, описанной около ΔABC. $\angle ACB$=120°, AB=6, MO=2.
Найти MC.

Решение:
В ΔАВС ОС – радиус окружности описанной около треугольника, значит
$\dfrac{AB}{2\,sin(ACB)} = OC,\ OC = 2\sqrt{3}$. Из прямоугольного ΔМОС МС=4.
Ответ: 4

Задача 5



Дано: $ABCD$ – прямоугольник
MD=8.
Найти AB и AD.

Решение:
В прямоугольном ΔAMD: AD=4, AM=4√3, из прямоугольного ΔAMB: AB=2√6
Ответ: 2√6

Если угол между пересекающимися плоскостями равен 90 градусам, то плоскости перпендикулярны.

Признак перпендикулярности плоскостей: если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Задача 6

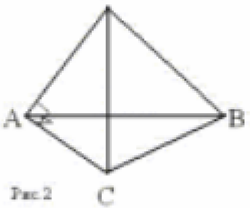
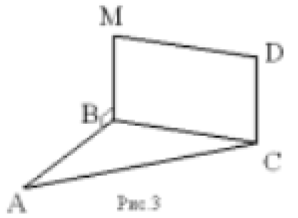


Рис 2

Дано: Δ АВС – прямоугольный;
АМ ⊥ АС;
М ∉ (АВС)
Доказать: АС ⊥ (АМВ)

□ Т.к. AC ⊥ AB и AC ⊥ AM, а AM ∩ AB, т.е. AM и AB лежат в плоскости (AMB), то AC⊥(AMB) по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.■

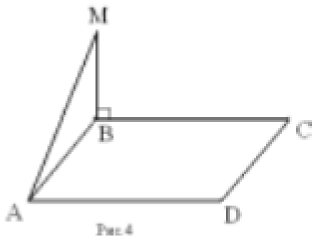
Задача 7



Дано: BMDC - прямоугольник,
M ∉ (ABC), MB ⊥ AB
Доказать: CD ⊥ (ABC)

□MB ⊥ BC, т.к. BMDC – прямоугольник, MB ⊥ AB по условию, BC ∩ AB, т.е. BC и ABлежат в плоскости (ABC) ⇒ MB ⊥ (ABC) по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. CD ∥ MB по свойству сторон прямоугольника ⇒ CD ⊥ (ABC) по теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна к плоскости (то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости). ■

Задача 8



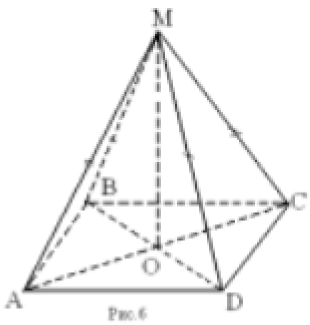
Дано: ABCD – прямоугольник,
M ∉ (ABC), MB ⊥ BC
Доказать: AD ⊥ AM

□1) ∠ABC = 90°, т.к. ABCD – прямоугольник ⇒ BC ⊥ AB, BS ⊥ MB по условию, MB ∩ AB = B, т.е. MB иAB лежат в плоскости (AMB) ⇒ BC ⊥ (AMB) по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

2) BC ∥ AD (по свойству сторон прямоугольника) ⇒ AD ⊥ (AMB) по теореме о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости (то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости).

3) Т.к. AD ⊥ (AMB) ⇒ AD ⊥ AM по определению прямой, перпендикулярной плоскости. ■

Задача 9



Дано: ABCD – параллелограмм,
M ∉ (ABC),
MB = MD,
MA = MC
Доказать: MO ⊥ (ABC)

□1) Т.к. O – точка пересечения диагоналей параллелограмма, то AO = CO и BO = DO. Δ BMD - равнобедренный, т. к. BM = MD по условию, значит MO - медиана и высота, т.е. MO ⊥ BD.

2) Аналогично доказывается в Δ AMC: MO ⊥ AC.

3) Итак, MO ⊥ BD и MO ⊥ AC. а BD и AC – пересекающиеся прямые, лежащие в плоскости (ABC) ⇒ MO⊥ (ABC) по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.■

(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

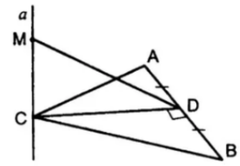
1.1. Сформулируйте теорему о трёх перпендикулярах.

1.2. Какие существуют способы доказательства перпендикулярности прямой и плоскости?

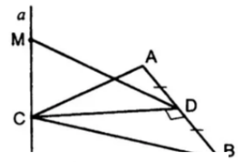
1.3. Как связаны между собой углы между пересекающимися прямыми и углами между плоскостями?

1.4. Какие свойства используются при решении задач на нахождение расстояний?

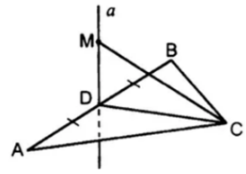
2. Решите предложенные задания (письменно):



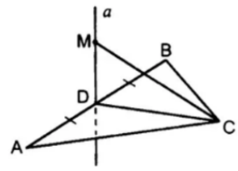
Задание 1. К плоскости треугольника ABC через вершину C проведена перпендикулярная плоскости прямая a. Расстояние от точки M на прямой a до середины стороны AB составляет 5. Найти длину отрезка MC, если длина AC равна $4\sqrt{2}$, а угол ACB равен 90°.



Задание 2. К плоскости треугольника ABC через вершину C проведена перпендикулярная плоскости прямая a. Расстояние от точки M на прямой a до середины стороны AB составляет 13. Найти длину отрезка MC, если длина AC равна $5\sqrt{2}$, а угол ACB равен 90°.



Задание 3. К плоскости равностороннего треугольника ABC через середину стороны AB проведен перпендикуляр MD длиной 8. Найти расстояние MC, если длина AB составляет $4\sqrt{3}$.



Задание 4. К плоскости равностороннего треугольника ABC через середину стороны AB проведен перпендикуляр MD длиной 40. Найти расстояние MC, если длина AB составляет $6\sqrt{3}$.

Отчетность

Работы принимаются до 26 ноября 2025 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание домашней работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:
ОД.07 Математика 19.11.25 (Фамилия Имя, группа)
К примеру:
ОД.07 Математика 19.11.25 (Иванов Иван, БУ и ТД 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате: https://t.me/+leGPsDn5EF8yMGIy

С уважением!
Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ
Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [Л. С. Атанасян и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 287 с.