Степень с целым показателем

Сегодня поговорим о возведении чисел в степень с целым показателем. Целые числа отличаются от натуральных тем, что к натуральным числам добавляется ноль и отрицательные числа.

$$\mathbb{Z} = \{0; 1; -1; 2; -2; \dots\}$$

Некоторые целые числа являются натуральными, например, 1, 2, 3, 10, а возводить в натуральную степень вы уже умеете, поэтому данная тема посвящена возведению в нулевую и отрицательную степени (минус первую, минус вторую, минус десятую степень).

$$x^0;\ x^{-1};\ x^{-2};\dots;\ x^{-10};\dots$$

Сначала вспомним свойства возведения в степень с натуральным показателем.

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, при условии $n > m$
3. $(a^n)^m = a^{nm}$
4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

1.

Обратите внимание на второе свойство.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Что произойдет, если отказаться от условия $n > m$, то есть, что будет, если степень числителя меньше или равна степени знаменателя?

Например, $\frac{3^4}{3^{11}}$

С одной стороны, получим единицу, деленную на три в седьмой степени:

$$\frac{3^4}{3^{11}} = \frac{3^4}{3^4 \cdot 3^7} = \frac{1}{3^7}$$

С другой стороны, если применим второе свойство, отказавшись от условия $n > m$, то мы получим:

$$\frac{3^4}{3^{11}} = 3^{4-11} = 3^{-7}$$

Поэтому вполне разумным представляется считать, что при возведении числа в целую отрицательную степень, достаточно возвести это число в соответствующую натуральную степень и разделить единицу на результат, то есть под записью три в минус седьмой степени надо понимать единицу, деленную на три в седьмой степени

$$3^{-7} = \frac{1}{3^7}$$

Так вы узнали о возведении числа в целую отрицательную степень. Теперь осталось разобраться в том, что такое нулевая степень числа. Снова обратимся ко второму свойству

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Рассмотрим случай, когда $m = n$:

$$\frac{7^5}{7^5} = 7^{5-5} = 7^0 = 1$$

По формуле получаем, что семь в пятой степени, деленное на семь в пятой степени, должно давать семь в степени пять минус пять, то есть семь в нулевой, а с другой стороны, разделив число на себя, конечно же, получим единицу. Поэтому вполне разумно считать, что число в нулевой степени это просто один.
Итак, сформулируем общее определение.

При возведении числа a в степень с целым показателем m возможны три случая:

1. Если m – натуральное (то есть положительное целое) число, то возведение происходит по знакомому правилу умножения числа на себя m раз:

$$m \in \mathbb{N}\ (m > 0) \quad a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ раз}}$$

2. Если m, то возведение в нулевую степень дает единицу

$$m \in \mathbb{Z}, m < 0 \quad a^m = \frac{1}{a^{|m|}}$$

3. Если m целое отрицательное число, то возведение сначала мы возводим в соответствующую положительную степень (то есть берем модуль от показателя), а потом делим единицу на результат:

$$m \in \mathbb{Z}, m < 0 \quad a^m = \frac{1}{a^{|m|}}$$

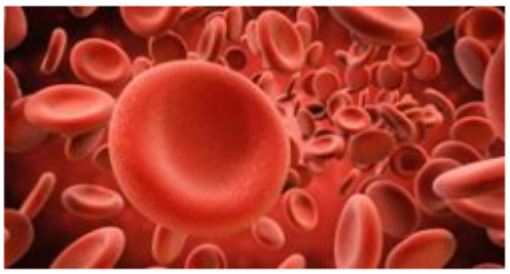
Рассмотрим применение этого определения на степенях числа 10.

$$10^0 = 1$$
$$10^1 = 10$$
$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$
$$10^3 = 1000$$
$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

Целые степени числа десять часто используют при изучении физики и других естественных наук для записи очень больших или очень маленьких чисел. Например, скорость света в вакууме составляет примерно $3 \cdot 10^8$, то есть триста миллионов метров в секунду, а масса одной клетки человека может составлять $2 \cdot 10^{-9}$ грамма.



$$c = 3 \cdot 10^8 = 300\,000\,000 \text{ м/с}$$



$$m = 2 \cdot 10^{-9} = 0{,}000\,000\,000\,2 \text{ г}$$

Итак, вы научились возводить числа в отрицательную степень. Какими же свойствами обладает эта операция? Оказывается, что теми же самыми, что и возведение в натуральную степень:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, при условии $n > m$
3. $(a^n)^m = a^{nm}$
4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Только теперь для использования второго свойства нам совершенно не обязательно выполнять условие $n > m$

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. $(a^n)^m = a^{nm}$
4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Рассмотрим, как эти свойства можно применить при решении задач.

1. Запишите десятичную дробь, соответствующую числу

$$3 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot (10^{-2})^2$$

Решение

Воспользуемся определением и третьим свойством

$$3 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot (10^{-2})^2 = 0{,}03 + 0{,}005 + 0{,}0002 = 0{,}0352$$

Ответ: $3 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot (10^{-2})^2 = 0{,}0352$

2. Найдите значение выражения

$$(4{,}9 \cdot 10^{-3})(4 \cdot 10^{-2})$$

Решение

Поменяем порядок множителей в соответствии со свойствами умножения и воспользуемся первым свойством степени

$$(4{,}9 \cdot 10^{-3})(4 \cdot 10^{-2}) = 4{,}9 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} = 19{,}6 \cdot 10^{-5} = 0{,}000196$$

Ответ: $(4{,}9 \cdot 10^{-3})(4 \cdot 10^{-2}) = 0{,}000196$

3. Вычислить

$$\frac{7^{-7} \cdot 7^{-8}}{7^{-13}}$$

Решение

Последовательно применяем первое и второе свойства степени, а затем используем определение.

$$\frac{7^{-7} \cdot 7^{-8}}{7^{-13}} = 7^{-7-8-(-13)} = 7^{-15+13} = 7^{-2} = \frac{1}{49}$$

Ответ: $\frac{1}{49}$

4. Вычислить

$$\frac{7^{-7} \cdot 7^{-8}}{7^{-13}}$$

Решение

Последовательно применяем четвертое и пятое свойства, преобразуем выражение, сокращаем дробь, получаем ответ.

$$\frac{6^{-3}}{3^{-2} \cdot 2^{-4}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$$

решение $\frac{6^{-3}}{3^{-2} \cdot 2^{-4}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{2^{-3} \cdot 3^{-3}}{3^{-2} \cdot 2^{-4}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3^{-1} \cdot 3}{2^{-1} \cdot 2} = 1$

Ответ: 1

На этом уроке вы научились возводить числа в нулевую и отрицательную степени, узнали, какими свойствами обладают эти операции. Посмотрите дополнительные материалы и выполните тестовые задания.