Sujet de physique 1 CCP PC 2014

corrigé pour l'UPS proposé par Philippe Borel (phiborel@numericable.fr) et Séverine Mensch (severine.mensch@wanadoo.fr) : merci de nous signaler tout problème qui nous aurait échappé !

Problème II : Quelques problèmes de diffusion thermique

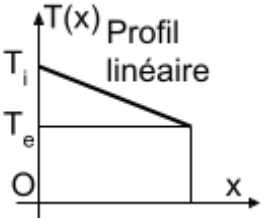
II.1 Gradient de température

-II.1.1 Soit un élément de volume dτ, de section A et de largeur dx. Effectuons un bilan d'énergie sur ce système entre les instants t et t+dt : $dU(t+dt)-dU(t)=\Phi_{Q,x}^{ent}.dt+\Phi_{Q,x+dx}^{ent}.dt$

en l'absence de terme de production interne, soit encore $\rho.c.A.dx.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}dt=j_{Q,x}.A.dt-j_{Q,x+dx}.A.dt$

En régime stationnaire : $0=A.\frac{dj_Q(x)}{dx}.dx.dt$

Avec la loi de Fourier $\vec{j}_Q=-\vec{grad}\,T(x)=-\frac{dT(x)}{dx}.\vec{u}_x$ on obtient $\frac{d^2T(x)}{dx^2}=0$



La solution est T(x)=a.x+b soit avec les conditions aux limites $T(x)=\left(\frac{T_e-T_i}{e}\right).x+T_i$

-II.1.2 $\vec{j}_Q=-\lambda.\frac{dT(x)}{dx}.\vec{u}_x=\lambda.\left(\frac{T_i-T_e}{e}\right).\vec{u}_x$

Par définition $\Phi(A)=\iint_A \vec{j}_Q.dS.\vec{u}_x$ soit $\Phi(A)=\iint_A \lambda.\left(\frac{T_i-T_e}{e}\right).dS$ et $\Phi(A)=\lambda.\left(\frac{T_i-T_e}{e}\right).A$

Le flux thermique est indépendant de la section considérée, donc en x=e/2 ou ailleurs… peu importe ! Cette propriété est conforme à un régime stationnaire, en l'absence de terme de création.

On peut écrire l'équation aux dimensions : $[\lambda]=\frac{[\Phi].L}{L^2.\theta}=[Puissance].L^{-1}.\theta.^{-1}$ soit λ en $W.m^{-1}.K^{-1}$

ou en fonction des dimensions fondamentales $[\lambda]=M.L^2.T^{-2}.L^{-1}.\theta.^{-1}=M.L.T^{-2}.\theta.^{-1}$

-II.1.3 En supposant que le manchot possède des plumes partout même sur la tête et … les fesses l'aire à considérer est l'aire $A_1=(2.a^2)+(4.a.\ell)=2.a.(a+2.\ell)$ A.N. $A_1=0{,}22m^2$

-II.1.4 En utilisant la continuité du flux thermique en x=0, $P_1=\Phi(A_1)=\lambda.\left(\frac{T_i-T_e}{e}\right).A_1$

D'où $\lambda=\frac{P_1.e}{A_1.(T_i-T_e)}=\frac{P_1.e}{2.a.(a+2.\ell).(T_i-T_e)}$ A.N. $\lambda=4{,}0.10^{-2}\ W.m^{-1}.K^{-1}$

-II.1.5 Pour l'ensemble des neufs manchots $A_9=(2.9.a^2)+(4.3.a.\ell)=2.a.(9.a+6.\ell)$
A.N. $A_9=0{,}78m^2$

Par continuité on recalcule la puissance totale métabolique nécessaire $P_9=\Phi(A_9)=\lambda.\left(\frac{T_i-T_e}{e}\right).A_9$.
A.N. $P_9=177W$.
Rapporté à un manchot, elle vaut $P'=P_9/9$.
Le facteur de réduction dû à ce « comportement social thermorégulateur vaut alors $P'/P_1=0{,}40$!

II.2 Equation de la chaleur

-II.2.1

Le phénomène de transfert thermique par conduction est un phénomène de transport d'énergie sans déplacement de matière apparent à l'échelle macroscopique. Naturellement à l'échelle microscopique, par chocs, les particules les plus agitées des zones chaudes cèdent de l'énergie aux particules les moins agitées des zones froides. Tandis que le phénomène de transfert thermique par convection provient du déplacement d'ensemble de matière, à l'échelle macroscopique.
Lorsque ces deux phénomènes existent comme dans un fluide, alors le transfert par convection est en général considéré comme le plus efficace.

-II.2.2

On remplace la solution $T_G(r,t)$ dans l'équation de la chaleur : $\frac{\partial T_G(r,t)}{\partial t} = D.\left(\frac{2}{r}.\frac{\partial}{\partial r}T_G(r,t) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}T_G(r,t)\right)$

Les différents termes donnent après calculs : $\frac{\partial T_G(r,t)}{\partial t} = (\pi.C)^{-3/2}.t^{-5/2}\left(-\frac{3}{2}+\frac{r^2}{C.t}\right).\exp\left(-\frac{r^2}{C.t}\right)$

$\frac{\partial T_G(r,t)}{\partial r} = -2.(\pi.C)^{-3/2}.\frac{t^{-5/2}}{C}.r.\exp\left(-\frac{r^2}{C.t}\right)$; $\frac{\partial^2 T_G(r,t)}{\partial r^2} = -2.(\pi.C)^{-3/2}.\frac{t^{-5/2}}{C}\left(1-\frac{2.r^2}{C.t}\right).\exp\left(-\frac{r^2}{C.t}\right)$

Par identification : C=4.D donc avec la définition du texte n=4 .

-II.2.3 ♦Au voisinage de O, $T_O(t) = T_G(0,t) = \frac{1}{(4.\pi.D.t)^{3/2}}$; $\lim_{t\to\infty} T_O(t) = 0$ la température en O décroît en $t^{-3/2}$ et s'annule aux grandes valeurs de t.
♦On cherche le rayon R(t) de la sphère dont la température est supérieure à $T_O(t)/2$ grâce à l'inégalité

$T_G(R,t) > \frac{T_O(t)}{2} \Rightarrow (\pi.4.D.t)^{-3/2}.\exp\left(-\frac{R^2}{4.D.t}\right) > \frac{1}{2}.(\pi.4.D.t)^{-3/2} \Rightarrow R(t) < \sqrt{4.D.t.Ln(2)}$

♦D'après la relation précédente, on peut dire que la diffusion thermique s'effectue sur une distance de l'ordre de R(t) soit de l'ordre de $\sqrt{D.t} = (D.T)^{\alpha}$ avec α=1/2.

II.3 Diffusion en présence de convection

-II.3.1 L'introduction d'une nouvelle condition aux limites en $r=R_s$ ne modifie pas l'équation « locale » de la chaleur à l'intérieur de la sphère : $\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} - D.\Delta T(r,t) = 0$.

-II.3.2 En $r=R_s$, la continuité du flux thermique assure l'égalité entre le flux diffusif en $r=R_s^-$ et le flux convectif en $r=R_s^+$ soit : $j_Q(R_s,t).4.\pi.R_s^2 = \psi_s(t).4.\pi.R_s^2$ soit $-\lambda\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R_s} = h.(T_s(t)-T_e)$

-II.3.3 Le changement de variable consiste à une translation de température, l'équation de la chaleur, équation aux dérivées partielles, reste de la même forme : $\frac{\partial \Theta(r,t)}{\partial t} - D.\Delta\Theta(r,t) = 0$. L'équation de continuité devient : $-\lambda\left.\frac{\partial \Theta(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R_s} = h.\Theta_s(t)$

-II.3.4 ♦On remplace la solution Θ(r,t)=f(r).g(t) dans l'équation de la chaleur :

$$f(r).g'(t) - D.\left(\frac{2}{r}.f'(r).g(t) + f''(r).g(t)\right) = 0$$

soit en divisant par le produit f(r).g(t), la relation cherchée $\frac{D}{f(r)}.\left(\frac{2}{r}.f'(r) + f''(r)\right) = \frac{g'(t)}{g(t)}$.

♦Dans l'équation précédente, le membre de droite est une fonction de t uniquement et celui de gauche de r uniquement, deux variables indépendantes. Pour que ces deux fonctions restent égales quelque soient t et r, elles doivent être égales à une même constante réelle K : $\frac{D}{f(r)}.\left(\frac{2}{r}.f'(r) + f''(r)\right) = \frac{g'(t)}{g(t)} = K$

La solution s'écrit g(t)=A.exp(K.t) avec K négatif pour éviter tout phénomène de divergence dans le temps. Posons K=-1/τ et A=g(0) : $g(t) = g(0).\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

-II.3.5 ♦On cherche une solution du type $f(r) = \frac{\sin(\alpha'.r)}{r}$. Je note ici le coefficient α', la notation α ayant déjà été utilisée en II.2.3.

On calcule $f'(r) = \frac{\alpha'.\cos(\alpha'.r)}{r} - \frac{\sin(\alpha'.r)}{r^2}$ et $f''(r) = -\frac{\alpha'^2.\sin(\alpha'.r)}{r^2} - \frac{2.\alpha'.\cos(\alpha'.r)}{r^2} + \frac{2.\sin(\alpha'.r)}{r^3}$

Et on remplace dans l'équation $D.\left(\frac{2}{r}.f'(r) + f''(r)\right) = K.f(r) = -\frac{1}{\tau}.f(r)$, il vient après simplification

$-D.\tau.\alpha'^2\frac{\sin(\alpha'.r)}{r} = -\frac{\sin(\alpha'.r)}{r}$ relation valable quelque soit r à condition que $D.\tau.\alpha'^2 = 1$

♦Au voisinage de r=0 $f(r) = \frac{\sin(\alpha'.r)}{r} \approx \frac{\alpha'.r}{r} = \alpha'$ donc $\lim_{r\to 0} f(r) = \alpha'$.

-II.3.6 La condition $-\lambda\left.\frac{\partial\Theta(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R_s} = h.\Theta_s(t)$ s'écrit après simplification

$-\lambda.f'(r=R_s) = h.f(r=R_s)$ soit $-\lambda\left(\frac{\alpha'.\cos(\alpha'.R_s)}{R_s} - \frac{\sin(\alpha'.R_s)}{R_s^2}\right) = h.\frac{\sin(\alpha'.R_s)}{R_s}$



En multipliant par $\frac{R_s^2}{\lambda.\sin(\alpha'.R_s)}$ et en posant x=α'.R_s on obtient bien la relation cherchée

$$1 - x.\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{h.R_s}{\lambda} = Nu$$

N_u

-II.3.7 Au voisinage de 0 :

$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ et On

$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} \approx x.\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)$

$$f(x) = 1 - x.\cot g(x) \approx 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right).\left(1 + \frac{x^3}{6}\right) \approx \frac{x^2}{3}$$ Le tracé de f(x) donne sur [0,4.π], naturellement quelque soit la valeur de Nu positive il existe une voire une infinité de racine à la question précédente.

-II.3.8 Pour $x = \alpha'.R_s = \frac{R_s}{\sqrt{D.\tau}}$

On ne considère ici que la plus petite valeur de x soit sur l'intervalle [0,π].

Si Nu<<1 alors f(x) tend vers 0 ; soit $f(x) \approx \frac{x^2}{3}$ ou $Nu \approx \frac{R_s^2}{3.D.\tau}$ et la relation cherchée $\tau \approx \frac{R_s^2}{3.D.Nu}$

Si Nu>>1 alors f(x) tend vers ∞ ; soit $x \approx \pi$ pour la plus petite valeur et la relation cherchée $\tau \approx \frac{R_s^2}{\pi^2.D}$

-II.3.9 A.N. Nu=1,66.10^{-2} <<1 donc τ=8,43.10^3s=2h20'