Исолов В.С.

Площади многоугольников

МГГУ им. М.А. Шолохова

Москва, 2009

Введение

Тема «Площади многоугольников» является неотъемлемой частью школьного курса математики, что вполне естественно. Ведь исторически само возникновение геометрии связано с потребностью сравнения земельных участков той или иной формы. Вместе с тем следует отметить, что образовательные возможности раскрытия этой темы в средней школе используются далеко не полностью.

Основная задача обучения математике в школе заключается в обеспечении прочного и сознательного овладения учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования.

Наряду с решением основной задачи углубленное изучение математики предусматривает формирование у учащихся устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие их математических способностей, ориентацию на профессии, существенным образом связанные с математикой, подготовку к обучению в вузе.

Квалификационная работа включает содержание курса математики общеобразовательной школы и ряд дополнительных вопросов, непосредственно примыкающих к этому курсу и углубляющих его по основным идейным линиям.

Включение дополнительных вопросов преследует две взаимосвязанные цели. С одной стороны, это создание в совокупности с основными разделами курса базы для удовлетворения интересов и развития способностей учащихся, имеющих склонность к математике, с другой – выполнение содержательных пробелов основного курса, придающее содержанию углубленного изучения необходимую целостность.

Квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и цитируемой литературы. В первой главе рассматриваются теоретические основы изучения площадей многоугольников, а во второй главе – непосредственно уже методические особенности изучения площадей.

Теоретические основы изучения площадей многоугольников

Теоретические основы изучения площадей многоугольников

Зачатки геометрических знаний, связанных с измерением площадей, теряются в глубине тысячелетий.

Еще в 4 – 5 тысяч лет назад вавилоняне умели определять площадь прямоугольника и трапеции в квадратных единицах. Квадрат издавна служит эталоном при измерении площадей благодаря многим своим замечательным свойствам: равные стороны, равные и прямые углы, симметричность и общее совершенство формы. Квадраты легко строить, или можно заполнить плоскость без пробелов.

В древнем Китае мерой площади был прямоугольник. Когда каменщики определяли площадь прямоугольной стены дома, они перемножали высоту и ширину стены. Таково принятое в геометрии определение: площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон. Обе эти стороны должны быть выражены в одних и тех же линейных единицах. Их произведение и составит площадь прямоугольника, выраженную в соответствующих квадратных единицах. Скажем, если высота и ширина стены измерены в дециметрах, то произведение обоих измерений будет выражено в квадратных дециметрах. И если площадь каждой облицовочной Плотки составляет квадратный дециметр, то полученное произведение укажет число плиток, нужное для облицовки. Это вытекает из утверждения, положенного в основу измерения площадей: площадь фигуры, составленной из непересекающихся фигур, равна сумме их площадей.

Древние египтяне 4000 лет назад пользовались почти теми же приемами, что и мы, для измерения площади прямоугольника, треугольника и трапеции: основание треугольника делилось пополам, и умножалась на высоту; для трапеции же сумма параллельных сторон делилась пополам и умножалась на высоту и т.п. Для вычисления площади S четырехугольника со сторонами a,b,c,d (рис. 1.1) применялась формула

$$S = \frac{a+c}{2} + \frac{b+d}{2}$$

(1.1)

т.е. умножались полусуммы противоположных сторон.

Рис. 1.1

Эта формула явно неверна для любого четырехугольника, из нее вытекает, в частности, что площади всех ромбов одинаковы. Между тем, очевидно, что у таких ромбов площади зависят от величины углов при вершинах. Данная формула верна только для прямоугольника. С ее помощью можно вычислить приближенно площадь четырехугольников, у которых углы близки к прямым.

Для определения площади S равнобедренного треугольника ABC (рис. 1.2), в котором $AB = AC$, египтяне пользовались приближенной формулой:

$$S = \frac{BC \cdot AB}{2}$$

(1.2)

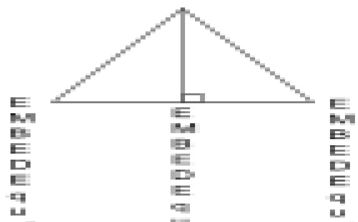

Рис. 1.2

Совершаемая при этом ошибка тем меньше, чем меньше разность между стороной AB и высотой AD треугольника, иными словами, чем ближе вершина B (и C) к основанию D высоты из A. Вот почему приближенная формула (1.2) применима лишь для треугольников с сравнительно малым углом при вершине.

Но уже древние греки умели правильно находить площади многоугольников. В своих «Началах» Евклид не употребляет слова «площадь», так как он под самим словом «фигура» понимает часть плоскости, ограниченную той или иной замкнутой линией. Евклид не выражает результат измерения площади числом, а сравнивает площади разных фигур между собой.

Как и другие ученые древности, Евклид занимается вопросами превращения одних фигур в другие, им равновеликие. Площадь составной фигуры не изменится, если ее части расположить по-другому, но без пересечения. Поэтому, например, можно, исходя из формул площади прямоугольника, находить формулы площадей других фигур. Так, треугольник разбивается на такие части, из которых затем можно составить равновеликий ему прямоугольник. Из этого построения следует, что площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту. Прибегая к подобной перекройке, находят, что площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, площадь трапеции – произведению полусуммы оснований на высоту.

Когда каменщикам приходится облицовывать стену сложной конфигурации, они могут определить площадь стены, подсчитав число пошедших на облицовку плиток. Некоторые плитки, естественно, придется обкалывать, чтобы края облицовки совпали с кромкой стены. Число всех пошедших в работу плиток оценивает площадь стены с избытком, число необломанных плиток – с недостатком. С уменьшением размеров клеток количество отходов уменьшается, и площадь стены, определяемая через число плиток, вычисляется все точнее.

Одним из поздних греческих математиков – энциклопедистов, труды которого имели главным образом прикладной характер, был Герон Александрийский, живший в 1 в. н. э. Будучи выдающимся инженером, он был назван также «Герон Механик». В своем произведении

«Диоптрика» Герон описывает разные машины и практические измерительные инструменты.
Одна из книг Герона была названа им «Геометрика» и является своего рода сборником формул и соответствующих задач. Она содержит примеры на вычисление площадей квадратов, прямоугольников и треугольников. О нахождении площади треугольника по его сторонам Герон пишет: « Пусть, например, одна сторона треугольника имеет в длину 13 мерных шнуров, вторая 14 и третья 15. Чтобы найти площадь, поступают вот как. Сложи 13, 14 и 15; получится 42. Половина этого будет 21. Вычти из этого три стороны одну за другой; сперва вычти 13 – останется 8, затем 14 – останется 7 и, наконец, 15 – останется 6. А теперь перемножь их: 21раз по 8 даст 168, возьми это 7 раз – получится 1176, а это еще 6 раз – получится 7056. Отсюда квадратный корень будет 84. Вот сколько мерных шнуров будет в площади треугольника».
В своем наиболее важном геометрическом произведении «Метрика» Герон излагает доказательство примененной выше формулы:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a,b,c стороны, p полупериметр треугольника.
Эта формула носит название «формулы Герона». На самом деле она была установлена еще в 3 в. до н. э. величайшим математиком древности Архимедом.

Практические правила Герона для вычисления площадей применялись греческими, римскими и средневековыми землемерами и техниками.

Методические особенности изучения площадей многоугольников в математических классах

№	Содержание изучаемого материала	Кол-во часов
	Площади многоугольников.	26
1	Вычисление площадей в древности.	1
2	Различные подходы к изучению понятий «площадь», «многоугольник», «площадь многоугольника».	
	Понятие о площади. Свойства площади.	1
	Понятие о многоугольнике.	1
	Понятие о площади многоугольника. Дескриптивное определение.	1
3	Различные формулы площадей многоугольников.	1
4	Вывод формул площадей многоугольников	
	Площадь треугольника. Формула Герона.	2
	Площадь прямоугольника.	1
	Площадь трапеции.	1
	Площадь четырёхугольника.	2
	Универсальная формула.	1
	Площадь n-угольника.	3
	Вычисление площади многоугольника по координатам его вершин.	2
	Формула Пика.	3
5	Теорема Пифагора.	2
6	Равносоставленность многоугольников. Теорема Больяя-Гервина.	1
7	Отношение площадей подобных многоугольников	1
8	Фигуры с наибольшей площадью	2

В углубленном изучении математики выделяются два этапа, отвечающие возрастным возможностям и потребностям и потребностям школьников и соответственно различающимся по целям.

Первый этап углубленного изучения математики является в значительной мере ориентационным. На этом этапе ученику надо помочь осознать степень своего интереса к предмету и оценить возможности овладения им, с тем, чтобы по окончании IX класса он смог сделать сознательный выбор в пользу дальнейшего углубленного выбор в пользу дальнейшего углубленного либо обычного изучения математики. Интерес и склонность учащегося к математике должны всемерно подкрепляться и развиваться. В случае же потери интереса, изменения его в другом направлении ученику должна быть обеспечена возможность перейти от углубленного изучения к обычному.

Углубленное изучение на втором этапе предполагает наличие у учащихся более или менее устойчивого интереса к математике и намерение выбрать после окончания школы связанную с ней профессию. Обучение на этом этапе должно подготовить подготовку к поступлению в вуз и продолжению образования, а также к профессиональной деятельности, требующей достаточно высокой математической культуры.

При углубленном изучении математики учащиеся должны приобрести умения решать задачи более высокой по сравнению с обязательным уровнем сложности, точно и грамотно формулировать изученные теоретические положения и излагать доказательства теорем, правильно пользоваться математической терминологией и символикой.

Следует иметь в виду, что требования к знаниям и умениям учащихся при углубленном изучении математики не должны быть завышены. Чрезмерность требований порождает перегрузку, что ведёт, особенно на первом этапе, к угасанию интереса к математике. Поэтому требования к результатам углубленного изучения математики на первом этапе ненамного превышает требования общеобразовательной программы. Требования на втором этапе в соответствии с его целями согласуются со средним уровнем требований, предъявляемых вузами к математической подготовке абитуриентов. Заметим, что минимальный обязательный уровень подготовки, достижение которого учащимися является необходимым и достаточным условием выставления ему положительной оценки, при углубленном и обычном изучении математики один и тот же. Однако тем учащимся классов с углубленным изучением математики, успехи которых в течении длительного времени не поднимаются выше минимального обязательного уровня.

Успешность решения задач углубленного изучения математики во многом зависит от организации учебного процесса. Учителю предоставляется возможность свободного выбора методических путей и организационных форм обучения, проявления творческой инициативы. Однако при этом следует иметь в виду ряд общих положений, изложенных ниже.

- Учебно-воспитательный процесс должен строится с учётом возрастных возможностей и потребностей учащихся.
- Основной причиной отсева школьников из классов с углубленным изучением математики является перегрузка,

поэтому не следует стремиться к чрезмерному насыщению программы дополнительными вопросами.

- Углубленное изучение математики предполагает прежде всего наполнение курса разнообразными, интересными и сложными задачами, овладение основным программным материалом на более высоком уровне.
- Для поддержания и развития интереса к предмету следует включать в процесс обучения занимательные задачи, сведения из истории математики. Это особенно важно на первом этапе, когда интерес учащихся ещё недостаточно устойчив.
- На втором этапе возрастает роль теоретических знаний, становятся весьма значимыми такие их качества, как системность и обобщённость. Значительное место должно быть уделено решению задач, отвечающих требованиям для поступающих в вузы, где математика является профилирующим предметом.
- В связи с тем, что в классы с углубленным изучением приходят школьники с разным уровнем подготовки, в процесс обучения на каждом этапе должны быть включены повторение и систематизация опорных знаний.
- Учебный процесс должен быть ориентирован на усвоение учащимися прежде всего основного материала; при проведении текущего и итогового контроля знаний качество усвоения этого материала проверяется в обязательном порядке.
- Значительное место в учебном процессе должно быть отведено самостоятельной математической деятельности учащихся – решению задач, проработке теоретического материала, подготовке докладов, рефератов и т. д.

- Очень важно организовать дифференцированный подход к учащимся, позволяющий избежать перегрузки и способствующий реализации возможностей каждого из них.

Экспериментальное подтверждение

Эксперимент длился с января по март 2004 года. В течение этого времени экспериментальный класс в ходе учебно-воспитательного процесса получал дополнительные задания на уроках математики на овладение методами решения геометрических задач.

Цель этого этапа заключалась в проверке эффективности подобранной системы заданий в реальной практике.

На данном этапе использовались такие методы, как и на констатирующем, то есть:

1. Невключённое наблюдение;
2. Тестирование;
3. Метод математической и статистической обработки данных.

Второй срез был проведён в начале формирующего этапа эксперимента. Участникам были предложены задания, которые были видоизменены и дополнены по сравнению с 1 срезом.

1. В некотором четырёхугольнике диагонали равны, а он не прямоугольник, диагонали взаимно перпендикулярны, а он не ромб. Что это за фигура?

2. На взаимно перпендикулярных прямых a_1 и a_2 отметьте по две точки так, чтобы полученные четыре точки стали вершинами квадрата.

3. В некотором четырёхугольнике известен один из углов. Какого вида может быть этот четырёхугольник,

чтобы было возможно вычислить все остальные углы этого четырёхугольника?

4. Дан равносторонний треугольник. Что нужно знать, чтобы вычислить его сторону?

Заключение

Результаты исследования по теме квалификационной работы, и проведённый эксперимент позволяют сделать следующие выводы:

1. Разработана методика занятий в математических классах по теме «Площади многоугольников».
2. В классах с углубленным изучением математики учащиеся познакомились с новыми для них формулами площадей многоугольников и выводами некоторых из них. Основная сложность изучения материалам состоит в том, что не существует единого универсального метода в нахождении площади n-угольника.
3. Особое внимание в работе уделено выводам формул площадей многоугольников, не рассматриваемых в школьном курсе математики.
4. Разработана система упражнений, способствующая сознательному усвоению учащимися предлагаемого материала по теме квалификационной работы.
5. Представленный в работе материал апробирован в средней общеобразовательной школе № 10 с. Бурлацкого Благодарненского района Ставропольского края на занятиях в 8-9 классах. Материал вполне доступен учащимся и вызывает у них должный интерес, лучше развивает их логическое мышление.

Таким образом, в результате проведённой работы видим, что целесообразно углубить в школьном курсе математики изучение темы «Площади многоугольников».

Литература

1. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия 7-9. Учебник для общеобразовательных учреждений.- М.: Просвещение, 1995.
2. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия 8/9. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 1996.
3. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. Для студентов педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1987.
4. Атанасян Л. С. Геометрия 7-9. учебник для общеобразовательных учреждений.- М.: Просвещение, 2000.
5. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владимирова Н. Г. Геометрия 7-11. Учебник для общеобразовательных учреждений.- М.: Просвещение, 1996.
6. Березина Л. Ю., Мельникова И. Б. Геометрия в 7-9 классах – М., 1990.
7. Блок А. Я. Методика преподавания в школе. – М.: Просвещение, 1987.
8. Воропаева Р. Н. Методические советы из опыта преподавания//Математика, 2001, №35, с. 25-28.
9. Гильберт Д. Основания геометрии. – М. – Л.: Гостехиздат, 1948.

10. Глейзер Г. И. История математики в школе. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1964.