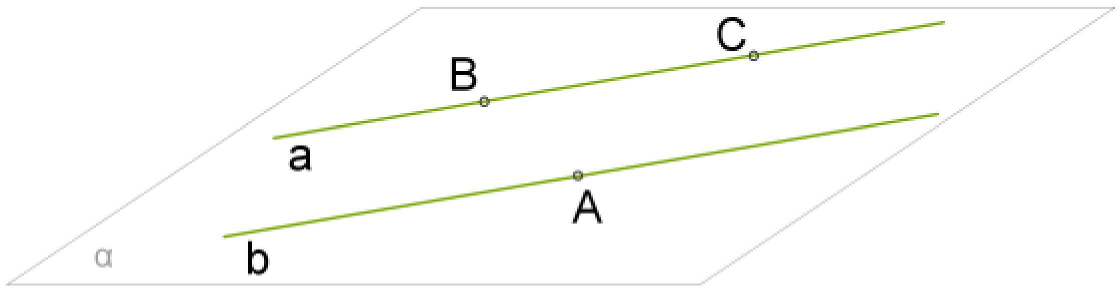
Взаємне розміщення прямої і площини <u>в просторі.</u>

<u>Ознака паралельності прямої і площини.</u>

Дві прямі в просторі називаються паралельними, якщо вони лежать в одній площині та не перетинаються.

Паралельність прямих a і b позначається так: a // b або b // a.

Теорема 1. Через дві паралельні прямі можна провести площину,і до того ж тільки одну.



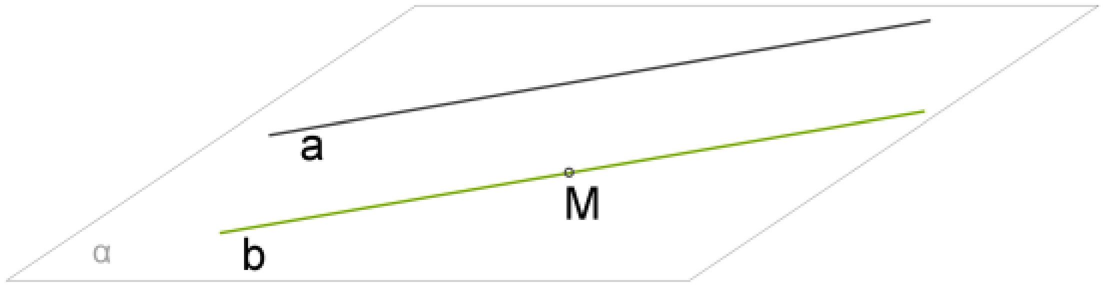
Доведення:

1.Якщо прямі a і b паралельні, із визначення випливає, що через них можна провести площину α.

2.Щоб довести, что така площина тільки одна, на прямій a позначаємо точки B і C, а на прямій b — точку A.

3.Оскільки через три точки, що нележать на одній прямій, можна провести тільки одну площину (2 аксіома), то α— єдина площина, якій належать прямі a і b.

Теорема 2. Через будь-яку точку простору поза даною прямою можна провести пряму, паралельну даній прямій, і до того ж тільки одну.



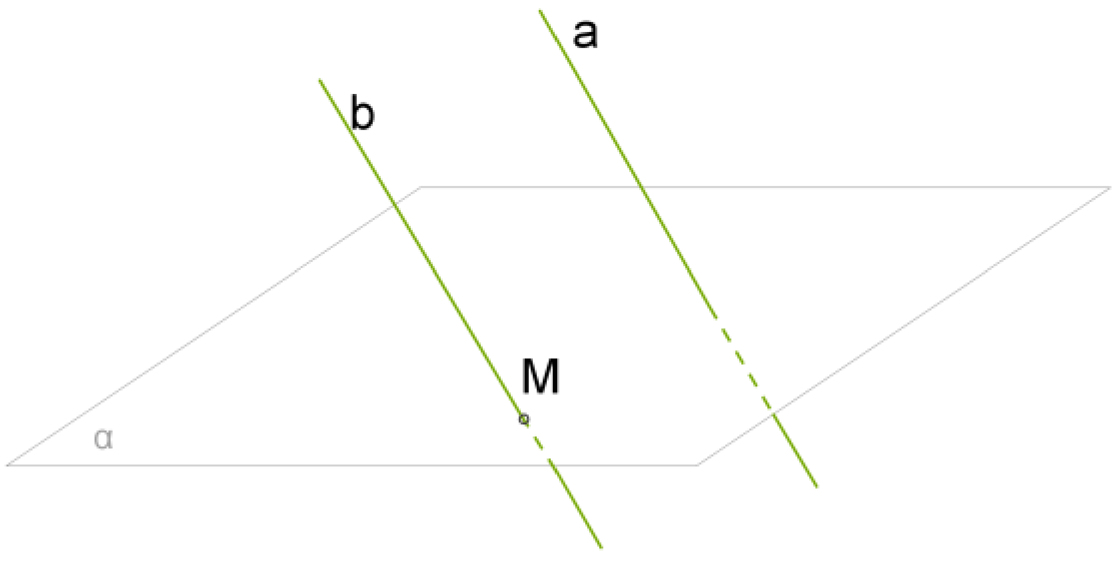
Доведення:

1.Через дану пряму a і точку M, що не лежить на прямій, проводимо площину α.

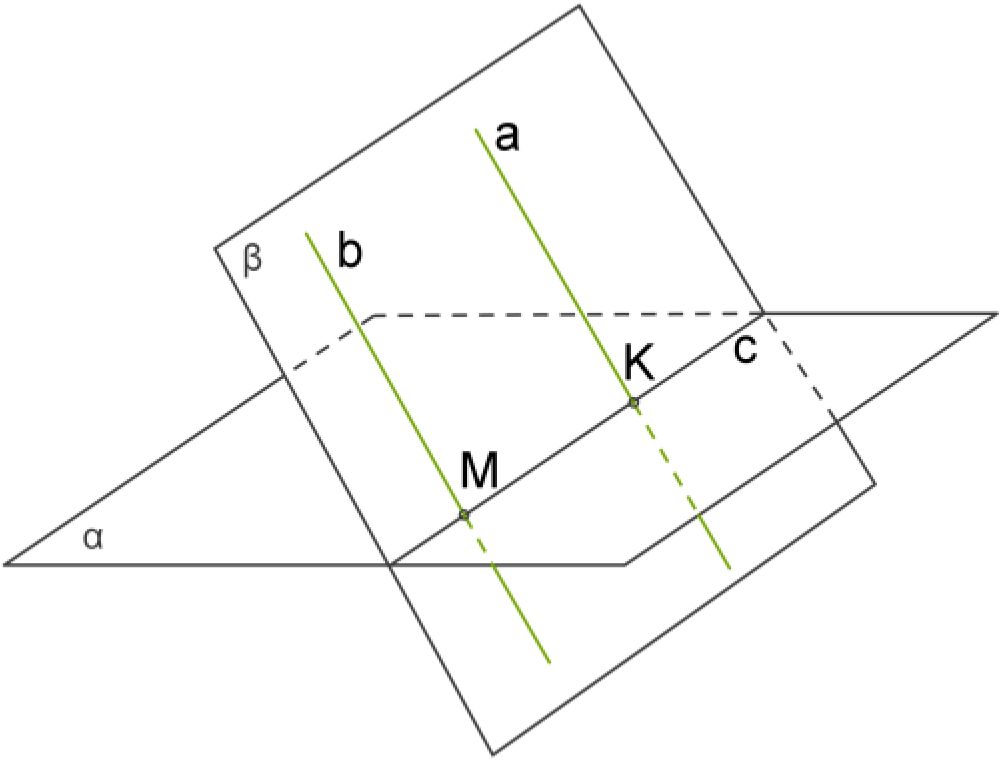
2.Така площина тільки одна, оскільки через пряму і точку,що не лежить на прямій,можна провести площину, до того ж тільки одну.

3.А в площині α через точку M можна провести тільки одну пряму b , що паралельна прямій a.

Теорема 3. Якщо одна з двох паралельних прямих перетинає дану площину, той інша пряма перетинає цю площину.



(1. рис.)



(2. рис.)

Доведення:
Розглянемо дві паралельні прямі a і b і припустимо, що пряма b перетинає площину α в точці M (1. рис.).

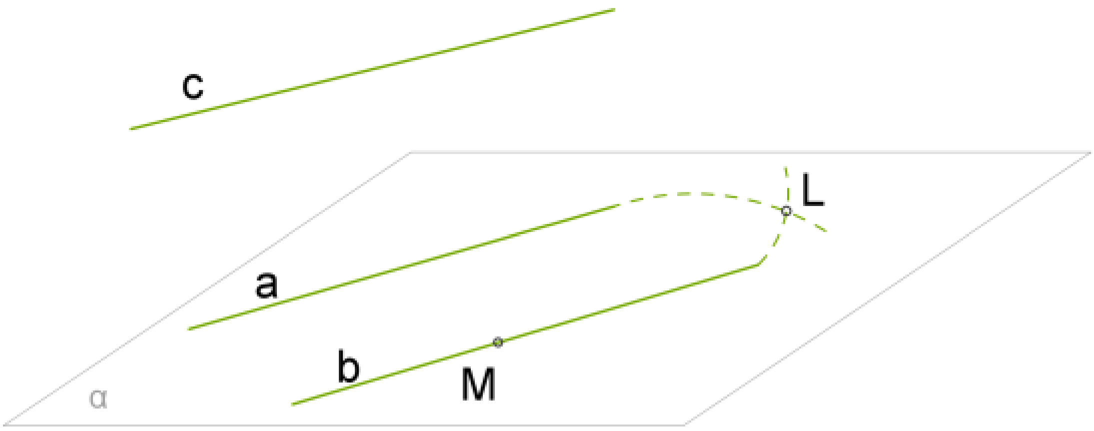
З 1-ої теореми відомо, що через паралельні прямі a і b можна провести тільки одну площину β.

Оскільки точка M розташована на прямій b, то M також належить площині β (2. рис.). Якщо площини α і β мають спільну точку M, то у цих площин є спільна пряма c, яка є прямою перетину цих площин (4 аксіома).

Прямі a, b і c розташовані в площині β.
Якщо в цій площині одна з паралельних прямих b перетинає пряму c, то друга пряма a також перетинає c.

Точку перетину прямих a і c позначимо за K.
Оскільки точка K розташована на прямій c, то K розташована в площині α і буде єдиною спільною точкою прямої a і площини α.
Отже, пряма a перетинає площину α в точці K.

Теорема 4. Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою.



Нехай a // c*і* b // c
Доведемо, що a // b
Доведення:
Оберемо точку M на прямій b.
Через точку M і пряму a, яка не містить цю точку, можна провести тільки одну площину α (Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести тільки одну площину).

Можливі два випадки:
1) пряма b перетинає площину α;
2) пряма b лежить у площині α.

Нехай пряма b перетинає площину α.
Отже, пряма c, що паралельна прямій b, також перетинає площину α. Оскільки a // c, то виходить, що a також перетинає цю площину. Але пряма a не може одночасно перетинати площину α ілежатиу площині α. Маємо суперечність, отже,припущення, що пряма b перетинає площину α,є неправильним.
Отже, пряма b лежить у площині α.

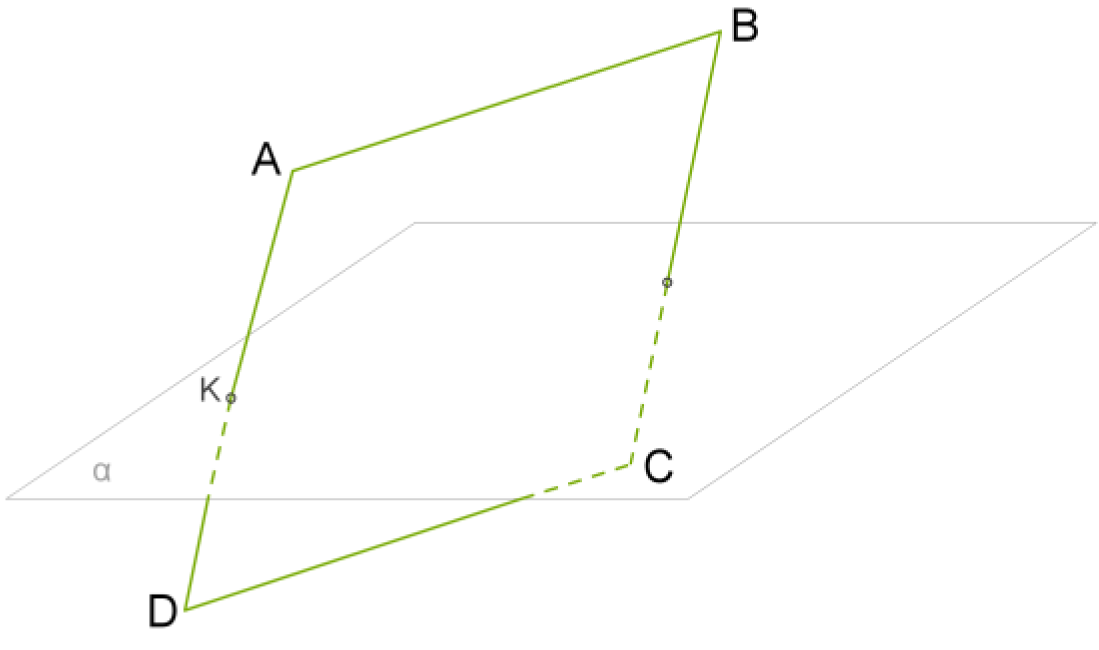
Тепер треба довести, що прямі a і b паралельні.
Нехай прямі a і b мають спільну точку L.

Це означає, що через точку L проведено дві прямі a і b, паралельні прямій c. Але відповідно до другої теореми це неможливо. Тому припущення неправильне, і прямі a і b не мають спільних точок.
Оскільки прямі a і b містяться в одній площині α і не мають спільних точок, то вони паралельні.

Уся множина прямих у просторі, які паралельні даній прямій, називається пучком паралельних прямих.
Висновки:
1) Будь-які дві прямі з пучка паралельних прямих паралельні між собою.
2) Паралельності прямих у просторі притаманна транзитивність: *якщо* a // b*і* b // c,*то* a // c.

Приклад:

Одна сторона параллелограма перетинає площину. Доведіть, що пряма, що містить протилежну сторону паралелограма, також перетинає цю площину.



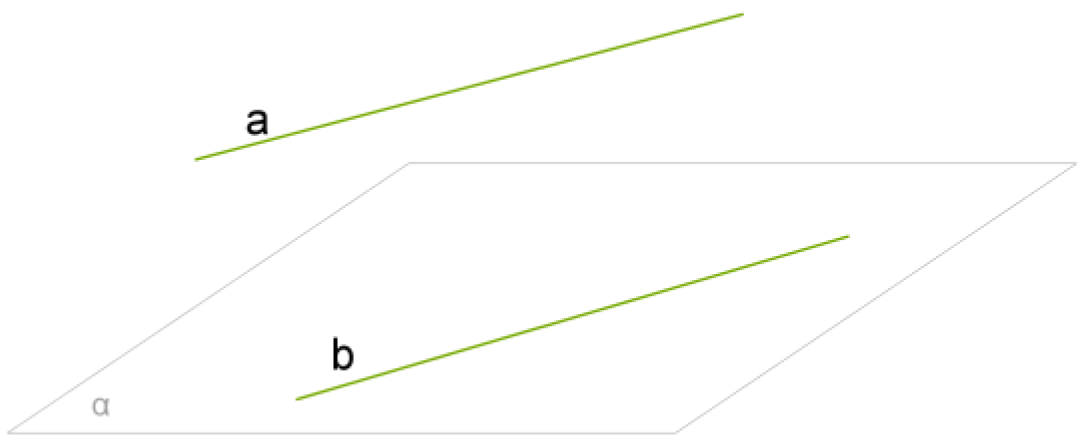
Припустимо, що у паралелограма ABCD сторона AD перетинає площину α в точці K.
Оскільки протилежні сторони паралелограма паралельні, то,відповідно до третьої теореми, пряма, що містить сторону CD, також перетинає площину α.

2. Паралельність прямої та площини.

Відповідно до аксіом, якщо дві точки прямої містяться в деякій площині, то пряма лежитьу цій площині. З цього виходить, що можливі три випадки взаємного розташування прямої та площини у просторі:
1) пряма лежить в площині;
2) пряма і площина мають тільки одну спільну точку (прямаі площина перетинаються);
3) пряма і площина не мають спільних точок.

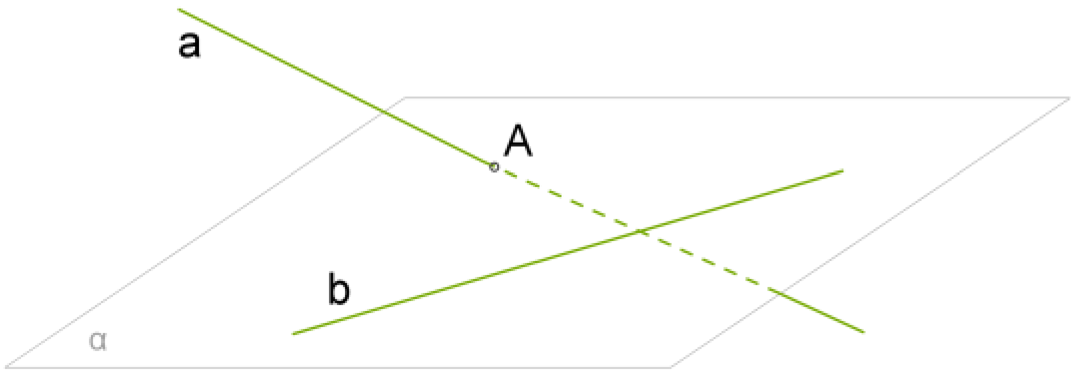
Пряма і площина називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Теорема 5 «Ознака паралельності прямої і площини».
Якщо пряма, що нележить у даній площині, паралельна будь–якій прямій з цієї площини, то ця пряма паралельна даній площині.



Доведення:

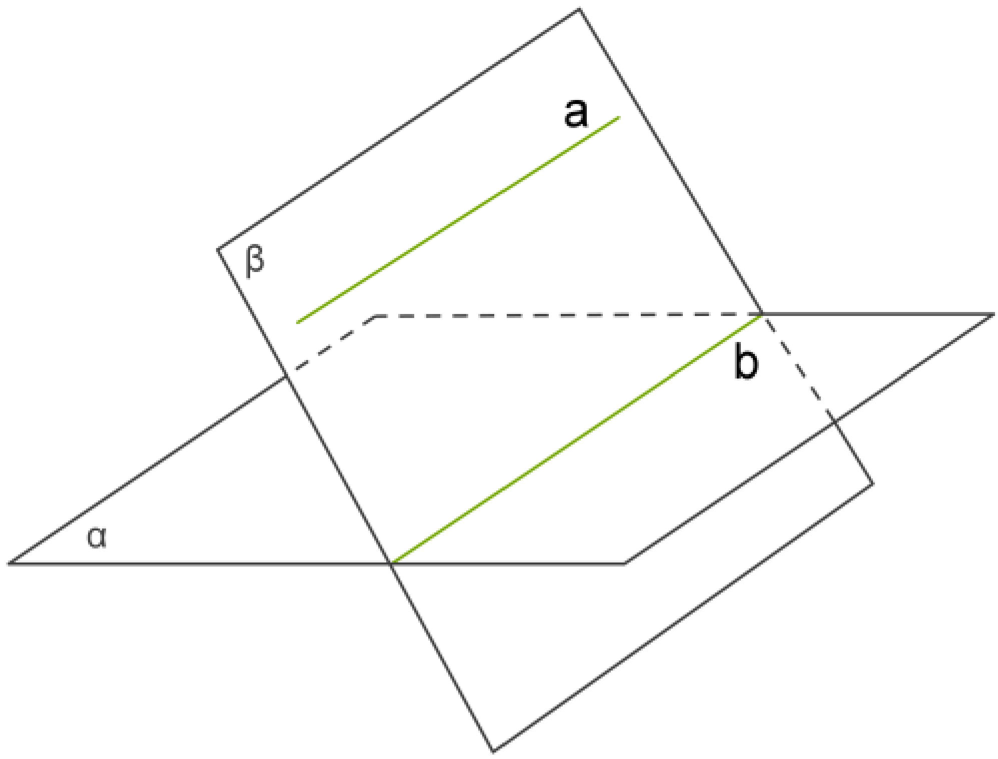
Доведення проведемо від супротивного. Нехай a не паралельна площині α, тоді пряма a перетинає площину в якійсь точці A. Причому A не лежить на b, оскільки a // b. Відповідно до ознаки прямих, що перетинаються, прямі a і b перетинаються.



Ми дійшли до суперечності. Оскільки a // b, вони не можуть перетинатися. Отже, пряма a паралельна площині α.

Теорема 6

Якщо площина β проходить через дану пряму a, паралельну площині α,і перетинає цю площину по прямій b, то b // a.



Пряму b іноді називають відбитком площиниβ на площині α.

Теорема 7.

Якщо одна з двох паралельних прямих a // b є параллельною даній площині α, то друга пряма або є параллельною цій площині, або лежить у цій площині.