

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2021

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΘΕΜΑ 1ο:

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f , είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **(Μονάδες 7)**

A2. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A .

Πότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο; **(Μονάδες 3)**

A3. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 .

Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ; **(Μονάδες 3)**

A4. Σημειώστε αν είναι **σωστή ή λάθος** κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

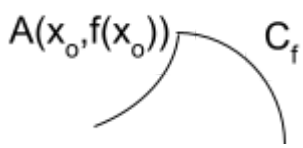
α. Η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ **ΔΕΝ** έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. **(Μονάδες 2)**

β. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε $f'(x_0) = (f(x_0))'$. **(Μονάδες 2)**

γ. Η γραφική παράσταση κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού, δέχεται οριζόντια εφαπτομένη. **(Μονάδες 2)**

δ. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \mathbb{R}] = \infty$, τότε η f ΔΕΝ είναι πολυωνυμική 3^{ου} βαθμού. **(Μονάδες 3)**

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ε.  Στο διπλανό σχήμα, είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Το σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής; **(Μονάδες 3)**

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 2ο:

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

B1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f . **(Μονάδες 2)**

B2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $y = f'(x)$ και να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα (αν έχει).

(Μονάδες 6)

B3. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο $y = f''(x)$ και να μελετηθεί η f ως προς την κοιλότητα και τα σημεία καμπής (αν έχει).

(Μονάδες 5)

B4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$. .
(Μονάδες 5)

B5. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο A , έχει με την C_f και άλλο κοινό σημείο εκτός του A .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3ο:

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

Γ1. Να βρείτε τα σημεία (ή το σημείο) της C_f στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα xx' .

(Μονάδες 6)

Γ2. Να δείξετε ότι η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με $\frac{1}{e}$.

(Μονάδες 5)

Γ3. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{3+h} - e^3}{h}$ (Μονάδες 8)

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε: $\frac{\xi - 2}{e^\xi} = \frac{e - 2}{e^2}$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4ο:

Δ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + \alpha$.

(i) Να βρεθεί η μονοτονία της f . (Μονάδες 4)

(ii) Να βρείτε τα σύνολα τιμών της f στα διαστήματα: (Μονάδες 4)

$$\Delta_1 = (-\infty, 0), \quad \Delta_2 = [0, 1] \quad \text{και} \quad \Delta_3 = (1, +\infty).$$

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$.

(i) Να βρείτε την παράγωγο $y = f'(x)$ και να αποδείξετε ότι: $f(4) = f(2)$.

(Μονάδες 3)

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2,4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

(Μονάδες 5)

(iii) Να βρείτε το ξ του ερωτήματος (ii). (Μονάδες 3)

(iv) Αν $\alpha > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει: $\alpha^x \geq x + f'(1)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

(Μονάδες 6)

Καλή προσπάθεια!