

CHƯƠNG 4.

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

4.1 Định nghĩa tỉ số lượng giác góc nhọn

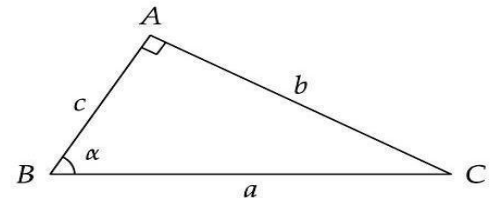
4.1.1 Khái niệm

Định nghĩa 4.1.1. Cho góc nhọn α . Xét tam giác ABC vuông tại A có $\angle ABC = \alpha$, ta có

- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là sin của góc α , kí hiệu $\sin \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là cosin của góc α , kí hiệu $\cos \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là tang của góc α , kí hiệu $\tan \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là cotang của góc α , kí hiệu $\cot \alpha$.

Cụ thể đối với tam giác vuông ABC trong Hình 3, ta có

- $\sin \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$.
- $\cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$.
- $\tan \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$.
- $\cot \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$.



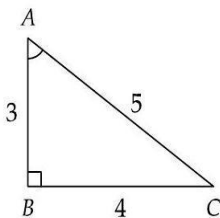
Hình 3

Tính chất 4.1.1. Với góc nhọn α , ta có

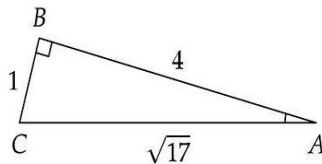
- a) $0 < \sin \alpha < 1$. b) $0 < \cos \alpha < 1$. c) $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$.

BÀI TẬP

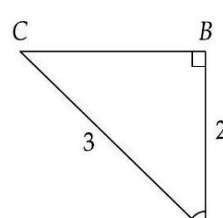
Bài tập 4.1. Tính các tỉ số lượng giác của góc nhọn A trong mỗi tam giác vuông ABC có $\hat{B} = 90^\circ$ ở Hình 5 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



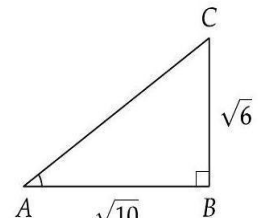
a)



b)



c)



d)

Hình 5

Bài tập 4.2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , tính tỉ số lượng giác góc B trong các trường hợp sau

- a) $AB = 4$ và $BC = 5$. b) $AC = 3$ và $AB = 4$. c) $AC = 3$ và $BC = 5$.

Bài tập 4.3. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh bằng 1. Gọi H là trung điểm BC . Tính giá trị lượng giác góc $\angle BAH$ và $\angle ABH$.

Bài tập 4.4. Cho $\triangle ABC$ cân cạnh bằng $AB = AC = 1$ và $BC = 2$. Gọi H là trung điểm BC . Tính giá trị lượng giác góc $\angle BAH$ và $\angle ABH$.

Bài tập 4.5. Cho tam giác ABC vuông tại C , có $BC = 12$ cm, $AC = 9$ cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B . Từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A .

Bài tập 4.6. Cho tam giác MNP vuông tại M , có $MN = 16$ cm, $MP = 12$ cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc N . Từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc P .

Bài tập 4.7. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AC = AB\sqrt{3}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B và góc C . Từ đó suy ra số đo của góc B và góc C .

Bài tập 4.8. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , có $BC = 12$ cm, $AC = 9$ cm. Tính tỉ số lượng giác của góc B .

Bài tập 4.9. Cho tam giác DEF vuông tại D , $DE = 5$ cm, $\hat{E} = \alpha$. Biết $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, hãy tính các cạnh còn lại của tam giác DEF (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài tập 4.10. Cho tam giác ABC vuông tại C . Biết $\cos A = \frac{5}{13}$ và $BC = 10$ cm. Hãy tính độ dài các cạnh góc vuông.

4.1.2 Tỉ số lượng giác góc nhọn đặc biệt

Bảng tỉ số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt (góc $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$)

Góc α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

BÀI TẬP

Bài tập 4.11. Tra bảng tỉ số lượng giác, đọc giá trị lượng giác của các góc $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ và 90° .

Bài tập 4.12. Tính giá trị của các biểu thức sau.

a) $P = \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ}{\tan 45^\circ}$. b) $A = \frac{2\cos 45^\circ}{\sqrt{2}} + \sqrt{3}\tan 30^\circ$. c) $B = \frac{2\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} - \cot 45^\circ$.

Bài tập 4.13. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $\hat{B} = 30^\circ, AC = \sqrt{3}$ cm. Tính độ dài các cạnh BC và AB .



Hình 7

Bài tập 4.14. Tìm chiều cao của tháp canh trong Hình 7 (kết quả là tròn đến hàng phần trăm).

4.1.3 Tỉ số lượng giác góc nhọn phụ nhau

Định nghĩa 4.1.2. Hai góc phụ nhau là hai góc có tổng số đo bằng 90° .

Tính chất 4.1.2. Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia

$$- \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha.$$

$$- \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

$$- \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha.$$

$$- \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha.$$

Từ nay khi viết các tỉ số lượng giác của một góc nhọn trong tam giác ta có thể viết $\sin A$ thay cho $\sin \hat{A}$.

⇔ **BÀI TẬP** ⇔

Bài tập 4.15. So sánh

a) $\sin 25^\circ$ và $\cos 65^\circ$. b) $\cos 25^\circ$ và $\sin 65^\circ$. c) $\tan 25^\circ$ và $\cot 65^\circ$.

d) $\cot 25^\circ$ và $\tan 65^\circ$. e) $\sin 72^\circ$ và $\cos 18^\circ$. f) $\cos 72^\circ$ và $\sin 18^\circ$.

g) $\cos 15^\circ$ và $\sin 75^\circ$. h) $\tan 72^\circ$ và $\cot 18^\circ$.

Bài tập 4.16. Cho biết $\sin 18^\circ \approx 0,31$, $\tan 18^\circ \approx 0,32$. Tính $\cos 72^\circ$ và $\cot 72^\circ$.

4.1.4 Tính tỉ số lượng giác góc nhọn bằng máy tính cầm tay

A. Tính các tỉ số lượng giác của các góc nhọn

Bài tập 4.17. Sử dụng máy tính cầm tay, tính (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

- a) $\sin 15^\circ$. b) $\cos 64^\circ 24'$. c) $\tan 20^\circ$. d) $\cot 23^\circ$

B. Xác định số đo của góc nhọn khi biết một tỉ số lượng giác của góc đó

Bài tập 4.18. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm α biết $\sin \alpha = 0,72$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm hoặc đến phút).

Bài tập 4.19. Sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính tỉ số lượng giác của các góc sau (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)

- a) 22° . b) 52° . c) $15^\circ 20'$. d) $52^\circ 18'$.

Bài tập 4.20. Vẽ một tam giác vuông có một góc bằng 40° . Đo độ dài các cạnh rồi dùng các số đo để tính các tỉ số lượng giác của góc 40° . Kiểm tra lại các kết quả vừa tính bằng máy tính cầm tay.

Bài tập 4.21. Vẽ một tam giác vuông có ba cạnh bằng 3 cm, 4 cm, 5 cm. Tính các tỉ số lượng giác của mỗi góc nhọn. Dùng thước đo góc để đo các góc nhọn. Kiểm tra lại các kết quả bằng máy tính cầm tay.

LUYỆN TẬP

Bài tập 4.22. Cho tam giác ABC vuông tại A . Tính các tỉ số lượng giác của góc B trong mỗi trường hợp sau.

- a) $BC = 5$ cm; $AB = 3$ cm ; b) $BC = 13$ cm; $AC = 12$ cm ;
c) $BC = 5\sqrt{2}$ cm; $AB = 5$ cm ; d) $AB = a\sqrt{3}$; $AC = a$.

Bài tập 4.23. Tính giá trị của các biểu thức sau.

- a) $A = \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\cot 45^\circ}$. b) $B = \frac{\tan 30^\circ}{\cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ}$.

Bài tập 4.24. Hãy viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45°

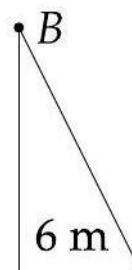
- a) $\sin 60^\circ$. b) $\cos 75^\circ$. c) $\cot 72^\circ$. d) $\tan 80^\circ$.

Bài tập 4.25. Sử dụng máy tính cầm tay, tính tỉ số lượng giác của các góc sau

- a) 26° . b) 15° . c) 72° . d) $81^\circ 27'$

Bài tập 4.26. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm góc nhọn α trong mỗi trường hợp sau đây

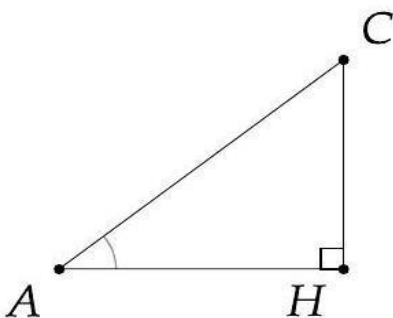
- a) $\cos \alpha = 0,6$. b) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. c) $\tan \alpha = 1,6$. d) $\cot \alpha = \frac{1}{4}$.



C. Toán ứng dụng

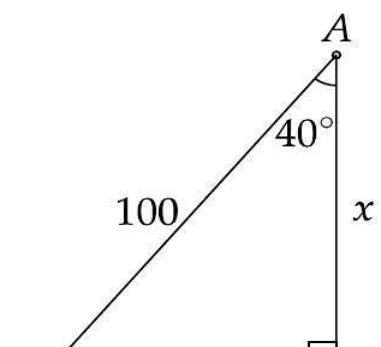
Bài tập 4.27. Một cột đèn điện AB cao 6 m có bóng in trên mặt đất là AC dài 3,5 m. Hãy tính góc $\widehat{BCA}$ (làm tròn đến phút) mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất.

Bài tập 4.28. Một cầu trượt trong công viên có độ dốc là 28° , và có độ cao là 2,1 m. Tính độ dài của mặt cầu trượt (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

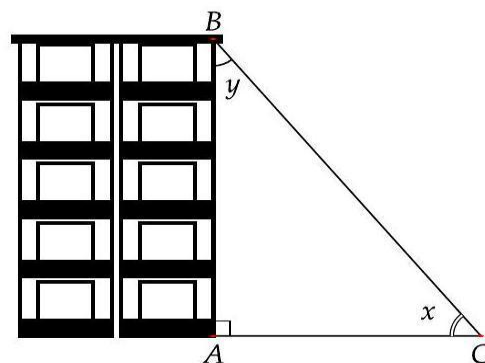


Bài tập 4.29. Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài 7,5 m. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 42° . Tính chiều cao của cột đèn.

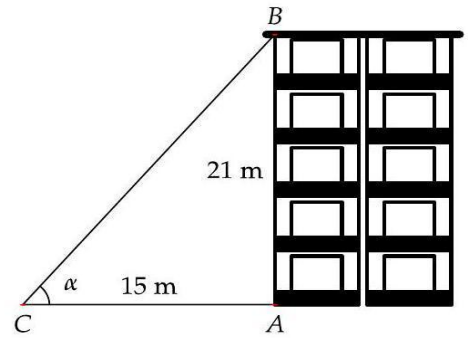
Bài tập 4.30. Một chiếc điều với đoạn dây thả điều AB dài 100 m, dây thả điều tạo với phương thẳng đứng một góc 40° (hình bên). Tính chiều cao của điều.



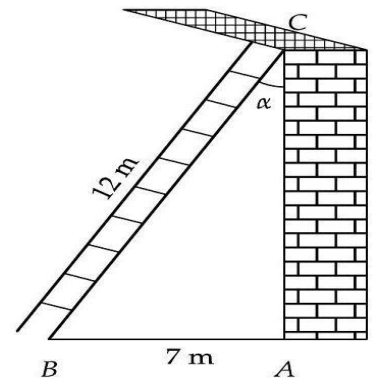
Bài tập 4.31. Tia nắng chiếu qua điểm B của nóc tòa nhà tạo với mặt đất một góc x và tạo với cạnh AB của tòa nhà một góc y (Hình 9). Cho biết $\cos x \approx 0,78$ và $\cot x \approx 1,25$. Tính $\sin y$ và $\tan y$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



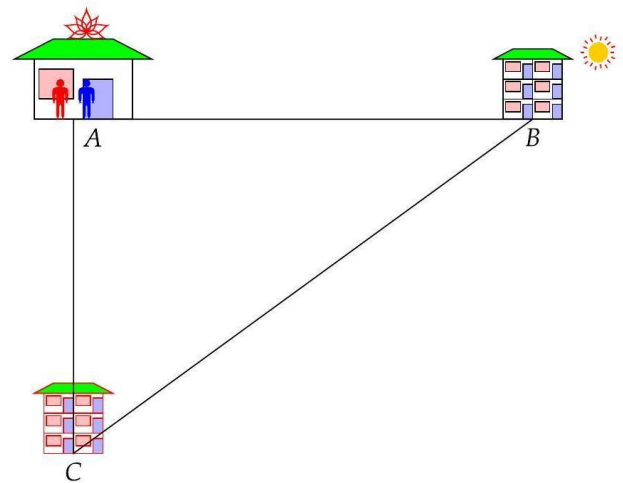
Bài tập 4.32. Tia nắng chiếu qua nóc của một tòa nhà hợp với mặt đất một góc α . Cho biết tòa nhà cao 21 m và bóng của nó trên mặt đất dài 15 m. Tính góc α . (kết quả làm tròn đến độ).



Bài tập 4.33. Một cái thang dài 12 m được đặt dựa vào một bức tường sao cho chân thang cách tường 7 m. Tính góc α tạo bởi thang và tường.



Bài tập 4.34. Hằng ngày, hai anh em An và Bình cùng đi bộ từ nhà ở A để đến trường. Trường của An ở vị trí B , trường của Bình ở vị trí C theo hai hướng vuông góc nhau. An đi với vận tốc 4 km/h và đến trường sau 15 phút. Bình đi với vận tốc 3 km/h và đến trường sau 12 phút. Tính khoảng cách BC giữa hai trường (làm tròn đến mét).



4.2 Hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông

4.2.1 Định lý

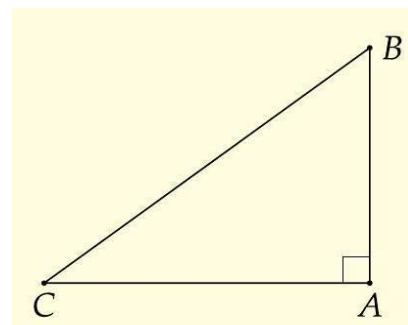
Định lý 4.2.1. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $BC = a, AC = b, AB = c$. Khi đó

a) $b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$.

b) $b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C$.

c) $c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$.

d) $c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$.

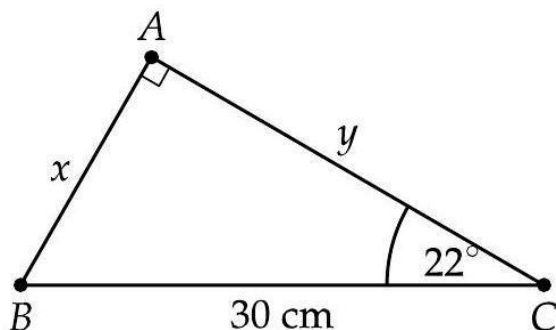


BÀI TẬP

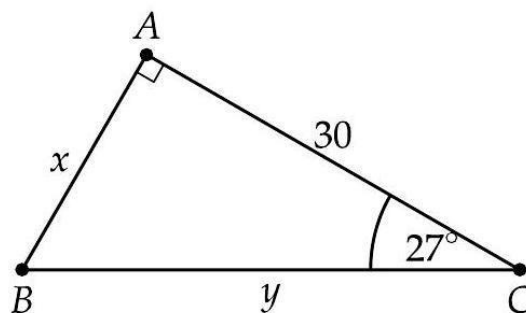
A. Tính cạnh và góc của tam giác vuông

Bài tập 4.35. Cho hình vẽ bên, tính độ dài x và y trong các hình sau

a)



b)



Bài tập 4.36. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có cạnh góc vuông $AC = 10$ cm. Tính AB trong các trường hợp sau

a) $\hat{C} = 34^\circ$.

b) $\hat{B} = 25^\circ$.

c) $\hat{C} = 65^\circ$.

d) $\hat{B} = 55^\circ$.

Bài tập 4.37. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có cạnh huyền bằng 10 cm. Tính độ dài hai cạnh góc vuông trong các trường hợp sau

a) $\hat{C} = 41^\circ$.

b) $\hat{B} = 36^\circ$.

c) $\hat{C} = 50^\circ$.

d) $\hat{B} = 70^\circ$.

Bài tập 4.38. Cho tam giác ABC , trong đó $BC = 11$ cm, $\hat{ABC} = 38^\circ$, $\hat{ACB} = 30^\circ$. Gọi điểm N là chân của đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC . Hãy tính độ dài đoạn thẳng AN .

Bài tập 4.39. Cho tam giác ABC có $BC = 6$ cm, $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 40^\circ$. Hãy tính

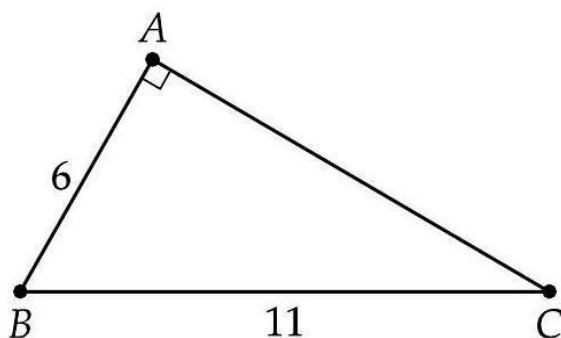
a) Chiều cao CH và cạnh AC .

b) Diện tích tam giác ABC .

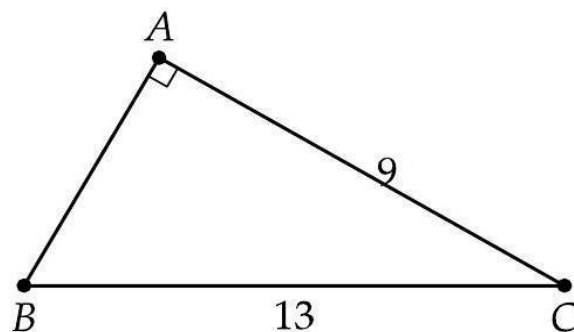
B. Giải tam giác vuông

Bài tập 4.40. Giải tam giác vuông trong các hình sau

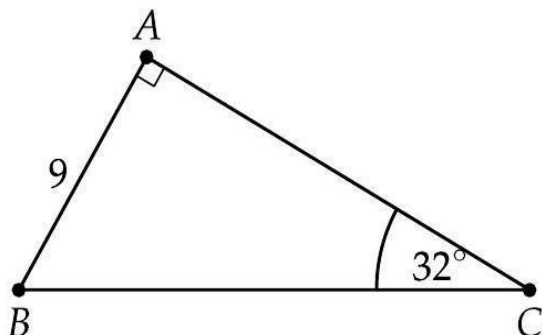
a)



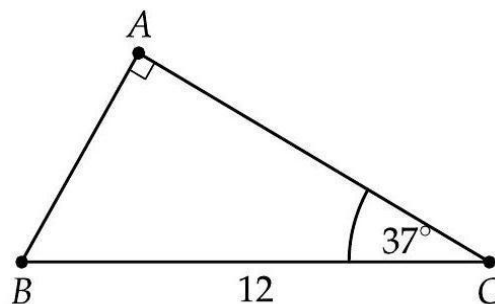
b)



c)



d)



Bài tập 4.41. Cho tam giác ABC với các cạnh góc vuông $AB = 5$, $AC = 8$. Hãy giải tam giác vuông ABC .

Bài tập 4.42. Cho tam giác OPQ vuông tại O có $\hat{P} = 36^\circ$, $PQ = 7$. Hãy giải tam giác vuông OPQ .

Bài tập 4.43. Cho tam giác ABC vuông tại A , giải tam giác ABC biết:

a) $\hat{B} = 35^\circ$ và $BC = 40$ cm ;

b) $AB = 70$ cm và $AC = 60$ cm .

Bài tập 4.44. Cho tam giác ABC vuông tại A , giải tam giác ABC biết

a) $AB = 6$ cm và $\hat{B} = 60^\circ$;

b) $AB = 6$ cm và $BC = 7$ cm .

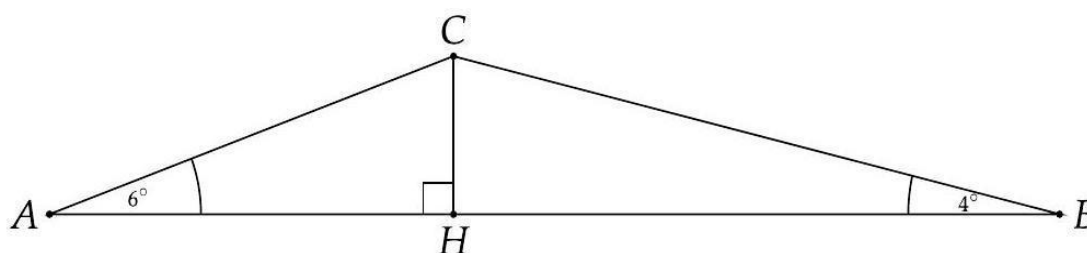
Bài tập 4.45. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12$ cm, $\hat{C} = 40^\circ$. Hãy tính độ dài

- a) AC . b) BC . c) Phân giác BD .

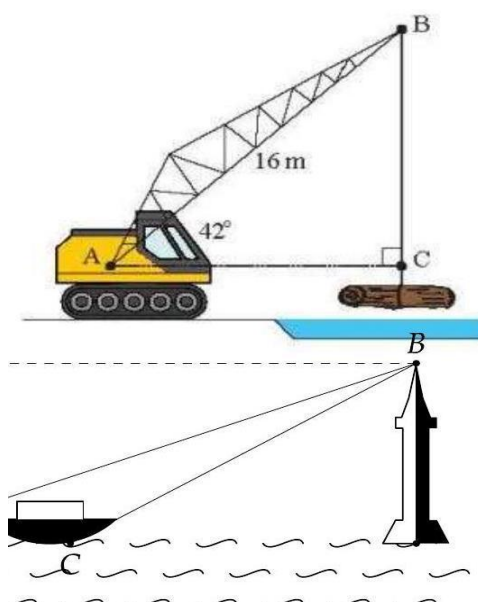
C. Toán ứng dụng

Bài tập 4.46. Lúc 6 giờ sáng, bạn An đi xe đạp từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B). Khi đi từ A đến B , An phải lên dốc AC và xuống dốc CB . Biết $AB = 762$ m, $\hat{A} = 6^\circ$, $\hat{B} = 4^\circ$

- a) Tính chiều cao h của con dốc.
b) Hỏi An đến trường lúc mấy giờ? Biết tốc độ lên dốc là 4 km/h và xuống dốc là 19 km/h.

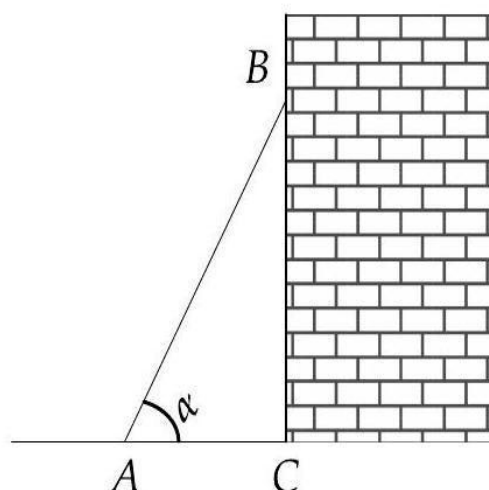


Bài tập 4.47. Một cần cẩu nâng một khối gỗ trên sông. Biết tay cần AB có chiều dài 16 m và nghiêng với góc 42° so với phương nằm ngang (hình bên). Tính chiều dài BC của đoạn dây cáp.

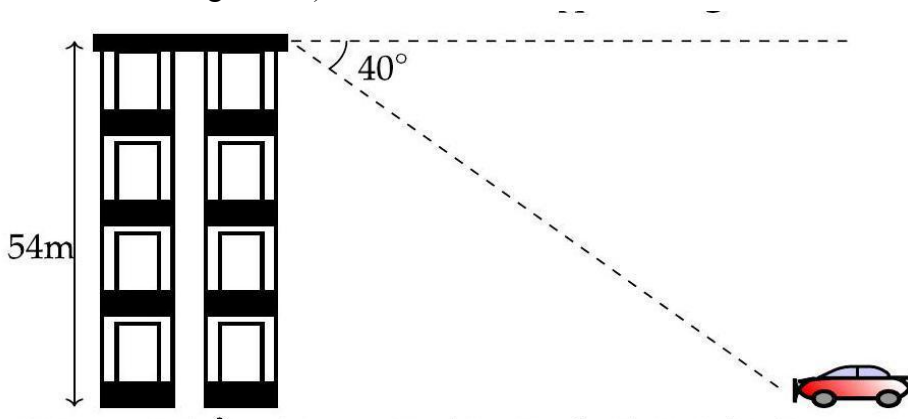


Bài tập 4.48. Từ trên một ngọn hải đăng cao 75 m ở vị trí B , người ta quan sát hai lần ở vị trí D và C thấy một chiếc thuyền đang hướng về phía hải đăng với góc hạ lần lượt là 30° và 45° . Hỏi chiếc thuyền đi được bao nhiêu mét giữa hai lần quan sát?

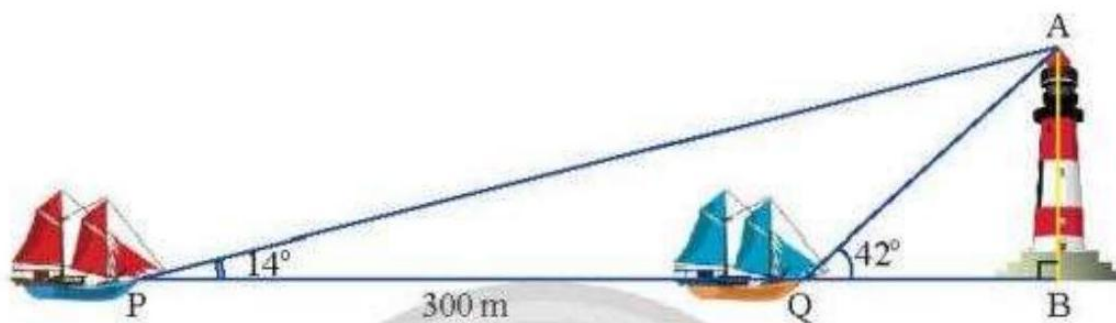
Bài tập 4.49. Một cái thang khi dựa vào tường thì góc α giữa thang và mặt đất trong khoảng từ 60° đến 65° thì an toàn. Hỏi một cái thang AB dài 3 m dựng vào tường thì chân thang A cách chân tường C trong khoảng nào thì an toàn? (làm tròn đến hai chữ số thập phân).



Bài tập 4.50. Một người đứng trên tầng của một tòa nhà với độ cao 54 m nhìn thấy một xe ô tô dưới đất với góc nghiêng 40° so với phương ngang. Hỏi chiếc ô tô cách tòa nhà bao nhiêu m ? (làm tròn đến hàng đơn vị).

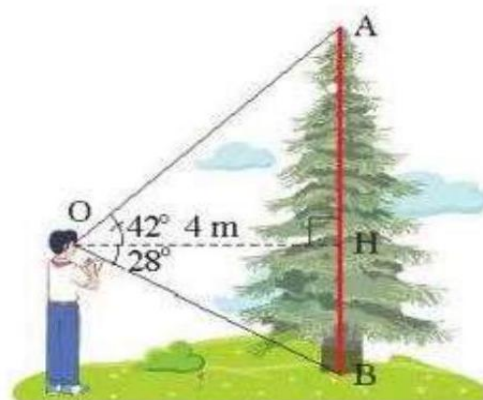


Bài tập 4.51. Hai con thuyền P và Q cách nhau 300 m và thẳng hàng với chân B của tháp hải đăng trên bờ biển. Từ P và Q , người ta nhìn thấy hải đăng dưới góc $\widehat{BPA} = 14^\circ$ và $\widehat{BQA} = 42^\circ$. Đặt $h = AB$ là chiều cao ngọn hải đăng



- Tính BQ và BP theo h .
- Tính chiều cao của tháp hải đăng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Bài tập 4.52. Quan sát hình bên, cho $OH = 4$, $\widehat{AOH} = 42^\circ$, $\widehat{HOB} = 28^\circ$. Tính AB (chiều cao của cây).



4.3 Ôn tập chương

TRẮC NGHIỆM

Câu 4.1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 10$ cm, $\hat{C} = 60^\circ$. Độ dài hai cạnh còn lại là

A. $AB = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm; $BC = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm .

B. $AB = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm; $BC = \frac{14\sqrt{3}}{3}$ cm .

C. $AB = 10\sqrt{3}$ cm; $BC = 20$ cm .

D. $AB = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm; $BC = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm .

Câu 4.2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 8$ cm, $AC = 6$ cm. Tỉ số lượng giác $\tan C$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) là

A. 0,87.

B. 0,86.

C. 0,88.

D. 0,89.

Câu 4.3. Giá trị của biểu thức $B = \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 70^\circ$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

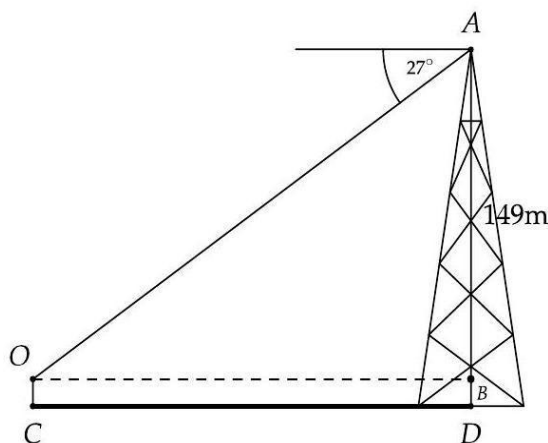
Câu 4.4. Một người quan sát ngọn hải đăng ở vị trí cao 149 m so với mặt nước biển thì thấy một du thuyền ở xa với góc nghiêng xuống là 27° . Hỏi thuyền cách xa chân hải đăng bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

A. 292 m.

B. 288 m.

C. 312 m.

D. 151 m.



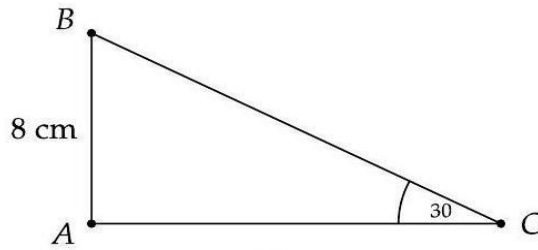
Câu 4.5. Cho Hình 2. Độ dài cạnh BC là.

A. 4 cm.

B. $8\sqrt{3}$ cm .

C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm .

D. 16 cm.



Hình 2

Câu 4.6. Cho tam giác MNP có $\hat{N} = 70^\circ, \hat{P} = 38^\circ$, đường cao $MI = 11,5$ cm. Độ dài cạnh NP của tam giác MNP (kết quả làm tròn đến hàng phần mười) bằng

- A. 20,9 cm. B. 18,9 cm. C. 40,6 cm. D. 16,9 cm.

Câu 4.7. Một cái thang dài 3 m đặt sát bờ tường, biết góc tạo bởi thang và bờ tường là 40° . Hỏi chân thang đặt ở vị trí cách tường bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

- A. 1,9 m. B. 2,3 m. C. 1,8 m. D. 2,5 m.

Câu 4.8. Một chiếc máy bay lên với tốc độ 450 km/h. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 30° . Hỏi sau 3 phút kể từ lúc cất cánh, máy bay cách mặt đất bao nhiêu kilômét theo phương thẳng đứng?

- A. 10,5 km. B. 12,75 km. C. 12 km. D. 11,25 km.

⇔ BÀI TẬP ⇔

Trong các bài tập dưới đây, nếu không nói gì thêm thì làm tròn kết quả đến hàng phần mười hoặc đến phút.

Bài tập 4.53. Tìm số đo góc α biết rằng.

- a) $\sin \alpha = 0,25$; b) $\cos \alpha = 0,75$; c) $\tan \alpha = 1$; d) $\cot \alpha = 2$.

Bài tập 4.54. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 18$ cm, $AC = 24$ cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B , từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc C .

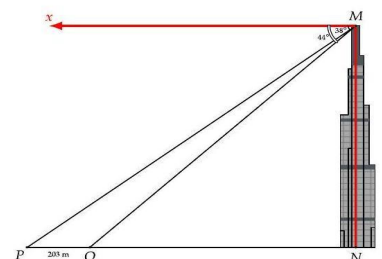
Bài tập 4.55. Cho tam giác ABC vuông tại A . Chứng minh rằng $\frac{AC}{AB} = \frac{\sin B}{\sin C}$.

Bài tập 4.56. Cho góc nhọn α biết $\sin \alpha = 0,8$. Tính $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$.

Bài tập 4.57. Tính giá trị của biểu thức.

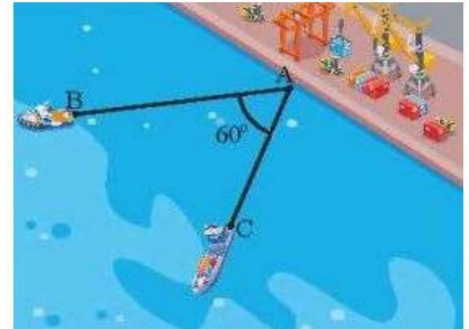
- a) $A = 4 - \sin^2 45^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\cot^2 45^\circ$; b) $B = \tan 45^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cot 30^\circ$;
c) $C = \sin 15^\circ + \sin 75^\circ - \cos 15^\circ - \cos 75^\circ + \sin 30^\circ$.

Bài tập 4.58. Cho tam giác OPQ vuông tại O có $\hat{P} = 39^\circ$ và $PQ = 10$ cm. Hãy giải tam giác vuông OPQ .



Bài tập 4.59. Hai điểm P và Q cách nhau 203 m và thẳng hàng với chân của một toà tháp (Hình 3). Từ đỉnh của toà tháp đó, một người nhìn thấy hai điểm P, Q với hai góc nghiêng xuống lần lượt là 38° và 44° . Tính chiều cao của toà tháp (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

Hình 3



Bài tập 4.60. Hai chiếc tàu thủy B và C cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hướng tạo thành một góc 60° (Hình 4). Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí/giờ, tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí/giờ. Hỏi sau 1,5 giờ hai tàu B và C cách nhau bao nhiêu hải lí (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?