

Corrigé
Concours commun Mines-Ponts-Télécom
PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE - FILIÈRE MP

Document rédigé par Paul Roux, Saint-Etienne (paul.roux@prepas.org)

DE LA TERRE A LA LUNE
Une odysée problématique de l'espace

A. Préliminaires

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

□ 1 - De façon immédiate,

L'écriture du principe fondamental de la dynamique pour la Lune, considérant que la Terre est fixe (hypothèse discutable car $m \ll M_T$ n'est pas ici vérifiée à mieux que 1% près..) mène

$$\text{aussi à } \frac{GM_T m}{d^2} = m \left(\frac{2\pi}{T_T(d)} \right)^2 d \quad \text{donc à la troisième loi de Kepler} \quad T_T(d) = 2\pi \sqrt{\frac{d^3}{GM_T}}$$

$$T_T(d) = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g} \left(\frac{d}{R_T} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

On en déduit immédiatement

L'application numérique fournit $T_T(d) = 2,37 \times 10^6 \text{ s} = 27,4 \text{ jours}$

B. En négligeant la gravitation lunaire

□ 2 - Choissant l'origine des énergies potentielles à l'infini, il vient $E_p = -\frac{GM_T \mu}{x}$ et

$$E_c = \frac{1}{2} \mu v^2 \quad \text{donc} \quad E = -\frac{GM_T \mu}{x} + \frac{1}{2} \mu v^2$$

□ 3 - La vitesse de libération correspond à la possibilité d'atteindre $x \rightarrow \infty$ avec une vitesse

$$\text{au moins nulle donc à } E \geq 0; \text{ on aura donc au départ} \quad 0 = -\frac{GM_T \mu}{R_T} + \frac{1}{2} \mu V_\infty^2 \quad \text{donc}$$

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T} \quad \text{ou, numériquement, } V_\infty = 11,2 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

□ 4 - De même, on suppose que le mobile atteint le point D avec une vitesse au moins nulle

$$\text{donc} \quad -\frac{GM_T \mu}{D} = -\frac{GM_T \mu}{R_T} + \frac{1}{2} \mu V^2(D) \quad \text{et} \quad V(D) = \sqrt{2gR_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{D} \right)}$$

immédiatement que $V(\infty) = V_\infty$ et $V(R_T) = 0$. On vérifie

□ 5 - Compte tenu de ce qui précède, on écrira $-\frac{GM_T}{D} = -\frac{GM_T}{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^2$ sous la forme

$\dot{x}^2 = 2GM_T \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{D} \right) = \frac{8\pi^2 D^3}{T_T^2(D)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{D} \right)$. Le changement de variable suggéré mène

successivement à $x = 2D \sin \psi \cos \psi$ puis à $\sin^4 \psi \dot{\psi}^2 = \frac{2\pi^2}{T_T^2(D)}$; lors de la phase de

montée du boulet, x et ψ croissent et on a donc $\sin^2 \psi \dot{\psi} = \frac{\pi\sqrt{2}}{T_T(D)}$ qui s'intègre sous la forme

demandée $t = T_T(D)f(\psi)$ avec $f(\psi) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int \sin^2 \psi d\psi = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} (\chi(\psi) - \chi(\psi_0))$.

La valeur initiale de ψ vérifie alors $R_T = D \sin^2 \psi_0$ ou $\psi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{R_T}{D}}$.

□ 6 - Le temps demandé correspond au passage de ψ de la valeur $\psi(0)$ à $\pi/2$, soit compte

tenu de ce qui précède, $\tau(D) = T_T(D) \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \psi_0 + \frac{1}{2} \sin \psi_0 \right)$.

□ 7 - De la même façon, le temps demandé correspond au passage de ψ_0 à ψ_1 avec comme

condition finale $d - r = d \sin^2 \psi_1$; on aura donc $\tau_1 = T_T(d) \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} (\chi(\psi_1) - \chi(\psi_0))$ où on évaluera chacun de ces termes de façon approchée. Notons d'abord que $R_T \ll d$ donc $\psi_0 \ll \pi$; on aura donc

$\chi(\psi_0) \approx \frac{2}{3} \psi_0^3 = \frac{2}{3} \left(\frac{R_T}{d} \right)^{\frac{3}{2}}$. De même, r est faible devant d donc ψ_1 est voisin

de $\pi/2$; on notera $\psi_1 = \pi/2 - \varepsilon$ avec $d - r = d \cos^2 \varepsilon = d - d \varepsilon^2$ donc $\varepsilon = \left(\frac{r}{d} \right)^{\frac{1}{2}}$ et $\sin(2\psi_1) = 2 \varepsilon$

au même ordre ; enfin $\chi(\psi_1) = \pi/2 - \varepsilon$ et on aura

$$\tau_1 = T_T(d) \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(1 - \frac{4}{\pi} \left(\frac{r}{d} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3\pi} \left(\frac{R_T}{d} \right)^{\frac{3}{2}} \right).$$

qui, après mise en facteur, prend bien la forme

Numériquement, on obtient $\tau_1 = 3,81 \times 10^5 \text{ s} = 4 \text{ jours } 9 \text{ heures } 52 \text{ minutes}$.

La vitesse au moment de l'impact v_1 est encore donnée par la conservation de l'énergie, soit

$-\frac{GM_T}{d} = -\frac{GM_T}{d-r} + \frac{1}{2}v_1^2$ donc $v_1 = \sqrt{2GM_T \frac{r}{d(d-r)}} \approx \frac{\sqrt{2GM_T r}}{d}$. Numériquement, on obtient $v_1 = 96,8 \text{ m.s}^{-1}$.

□ 8 - Il faut pointer la direction qu'occupera la Lune au moment où le boulet y parviendra, c'est-à-dire au bout d'une durée τ_1 . La Lune tournant autour de la Terre en une durée égale à $T_T(d)$, l'angle qu'elle aura parcouru sur sa trajectoire pendant ce trajet vaut $\theta_1 = 2\pi \tau_1/T_T(d)$ soit $\theta_1 = 1,02\text{rad} = 58^\circ 14'$.

C. Avec la gravitation lunaire

□ 9 - Au point E, les deux champs gravitationnels s'annulent et $\frac{GM_T}{\xi^2} = \frac{Gm}{(d-\xi)^2}$ d'où on déduit $\xi = \frac{d}{1+\varepsilon}$ ou, numériquement, $\xi = 345600\text{km}$.

Si le boulet atteint ce point avec une vitesse aussi faible soit-elle, il passe dans la zone $x > \xi$ où le champ gravitationnel de la Lune l'emporte et le boulet tombera sur la Lune.

Ce point n'est pas un point d'équilibre car le système Terre-Lune n'est pas fixe.

□ 10- Il suffit d'écrire ici encore le théorème de conservation de l'énergie mécanique sous la

forme $\frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GM_T\mu}{x} - \frac{Gm\mu}{d-x} = \frac{1}{2}\mu v_0^2 - \frac{GM_T\mu}{R_T} - \frac{Gm\mu}{d-R_T}$ qui, après simplification par μ et compte tenu de la question 1, prend la forme proposée par BARBICANE, qui est donc correcte. Le théorème de l'énergie cinétique est effectivement une intégrale, celle du principe fondamental de la Dynamique qu'on identifie facilement sous le vocabulaire ancien rappelé ici.

L'ordre de grandeur des différents termes sera évalué pour $x = \xi$, où on remarquera un terme

prépondérant (-1) , deux termes correctifs $\frac{R_T}{\xi} = 1,84 \times 10^{-2}$ et $\frac{m}{M_T} \frac{R_T}{d-\xi} = 2,05 \times 10^{-3}$ et un

terme négligeable $\frac{m}{M_T} \frac{R_T}{d-R_T} = 2,1 \times 10^{-4}$.

La vitesse demandée est la valeur de v_0 nécessaire pour atteindre $x = \xi$ avec $v = 0$ au moins,

soit $V(\xi) = \sqrt{2gR_T} \sqrt{1 - \frac{R_T}{\xi} - \varepsilon^2 \frac{R_T}{d-\xi} + \varepsilon^2 \frac{R_T}{d-R_T}}$ donc $V(\xi) = 10,97\text{km.s}^{-1}$.

□ 11- On écrit ce rayon ρ tel que $\frac{M_T}{\rho^2} = \frac{M_S}{(d_{TS}-\rho)^2}$ soit $\rho = \frac{d_{TS}}{1 + \sqrt{M_S/M_T}} = 2,6 \times 10^5\text{km}$. Puisque $d = 3,84 \times 10^5\text{km} > \rho$, la Lune est un astéroïde solaire.

□ 12- Dans le modèle de la SI, il suffirait de calculer le temps τ_2 comme la somme du temps τ_{21} correspondant au passage du sol terrestre au point E, et du temps τ_{22} qui correspondrait au passage du sol lunaire au même point E, avec à chaque fois une vitesse nulle en E :

$$\tau_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \left[T_T(\xi) \left(\frac{\pi}{2} - \chi(\psi_{21}) \right) + T_L(d-\xi) \left(\frac{\pi}{2} - \chi(\psi_{22}) \right) \right]$$

où on a posé $R_T = \xi \sin^2 \psi_{21}$ et $r = (d-\xi) \sin^2 \psi_{22}$.

D. Résistance de l'air

□ 13- L'équation du mouvement devient $\mu \frac{dv}{dt} = -kv^2$ ou encore $\mu \frac{dv}{dy} = -kv$ qui s'intègre

immédiatement selon $\frac{V_Y}{v_0} = \exp\left(-\frac{kY}{\mu}\right)$ ou numériquement $\frac{V_Y}{v_0} = 0,82$. L'ordre de grandeur est compatible avec celui proposé par BARBICANE.

Négliger la pesanteur revient, par exemple au départ du boulet, à considérer que $R \gg \mu g$ donc à affirmer que $kv_0^2 = 1,2 \times 10^7 \text{ N} \gg \mu g = 9,8 \times 10^4 \text{ N}$ (en prenant une vitesse de l'ordre de grandeur de la vitesse de libération), ce qui est tout à fait raisonnable.

□ 14- On écrit de même $\mu \frac{dv}{dt} = -Av^2 \exp(-qy)$ donc $\mu \frac{dv}{v} = -A \exp(-qy) dy$ qui s'intègre

selon $\ln \frac{v}{v_0} = \frac{A}{q\mu} [\exp(-qy) - 1]$ d'où on tire $v_0 = V_\infty \exp\left(\frac{A}{q\mu} (1 - \exp(-qY))\right)$ ou, numériquement, $v_0 = 16,75 \text{ km.s}^{-1}$.

□ 15- Le travail de la force résistance est égal (en valeur absolue) à la diminution d'énergie

cinétique du boulet ; le bilan thermique pour celui-ci s'écrit donc $\frac{\eta}{2} (v_0^2 - V_\infty^2) = \int_{T_0}^T c(T) dT$

si T_0 désigne la température initiale du boulet ; numériquement $\frac{\eta}{2} (v_0^2 - V_\infty^2) = 3,88 \times 10^6 \text{ J}$ qui

est égal à $5 \times 10^{-2} \frac{T^2 - T_0^2}{2}$ d'où, avec $T_0 = 300 \text{ K}$, $T = 12,5 \times 10^3 \text{ K}$. Une telle valeur est largement supérieure aux températures de fusion de tous les matériaux connus.

□ 16- Il suffit d'écrire que la fraction η du travail $R dy = R v dt$ de la force de frottement est utilisée pour réaliser l'ablation de la masse dm .

Puisque la masse du système étudié est variable, on doit faire un bilan de quantité de mouvement en deux parties.

A l'instant t , la masse $m(t)$ a la vitesse $v(t)$; à l'instant $t + dt$, la masse $m + dm$ ($dm < 0$) a la vitesse $v(t + dt)$ tandis que la masse $-dm$ qui a subi l'ablation est restée à la vitesse v dans la

« traînée » du boulet. On écrira donc $\frac{(m + dm)(v + dv) - dm v - m v}{dt} = -R$ ou, après

développement au premier ordre, $m(t) \frac{dv}{dt} = -R$. Finalement, le système différentiel à

résoudre s'écrit
$$\begin{cases} m(t) \frac{dv}{dt} = -Av^2 \exp(-qy) \\ v(t) = \frac{dy}{dt} \\ \frac{dm}{dt} = -\frac{\eta}{\lambda} Av^3 \exp(-qy) \end{cases}$$
.

E. Canon et poudre

□ 17- $N = \frac{\rho S X_0}{M_a}$

□ 18- La pression exercée par le gaz vérifie $p = \frac{NRT}{Sx}$ où x est l'abscisse de la base du

boulet ; le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors $\mu \frac{dv}{dt} = (p - p_0)S$ où on négligera dans la suite la pression atmosphérique p_0 devant p , ce qui mène à l'équation

$\mu \frac{dv}{dt} = \frac{NRT}{x}$ ou $\mu v dv = NRT \frac{dx}{x}$ qui s'intègre selon $\frac{\mu v^2}{2} = NRT \ln \frac{x}{x_0}$ donc

$$X = X_0 \exp\left(\frac{\mu W^2}{2NRT}\right)$$

□ 19- Compte tenu de $X = X_0 \exp\left(\frac{\mu W^2}{2NRT}\right)$ et $N = \frac{\rho S X_0}{M_a}$, on a $X = X_0 \exp\left(\frac{\mu W^2 M_a}{2\rho S X_0 RT}\right)$

soit $\frac{dX}{dX_0} = \exp\left(\frac{\mu W^2 M_a}{2\rho S X_0 RT}\right) \left[1 - \frac{\mu W^2 M_a}{2\rho S X_0 RT}\right]$ et X sera minimal si $X_0 = \frac{\mu W^2 M_a}{2\rho S RT}$ soit

numériquement $X_0 = 84,9\text{m}$ et donc $X = X_0 e$ donc $X = 230,8\text{m}$.

□ 20- On écrira ici $\mu \frac{dv}{dt} = p(x)S = p(x_0) \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha S$ ou $\mu v dv = p(x_0) S x_0^\alpha x^{-\alpha} dx$ qui s'intègre

selon $\frac{\mu v^2}{2} = \frac{p(x_0) S x_0^\alpha}{1-\alpha} (x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha})$ donc $\frac{\mu W^2}{2} = \frac{p(x_0) S X_0^\alpha}{1-\alpha} \left[\left(\frac{X_0}{X}\right)^{\alpha-1} - 1 \right]$ qu'on mettra

encore sous la forme $\frac{\mu W^2}{2} = \frac{NRT}{\alpha-1} \left[1 - \left(\frac{X_0}{X}\right)^{\alpha-1} \right]$ si T désigne la température juste après

l'explosion. L'expression de X est encore $X = X_0 \left[1 - \frac{\alpha-1}{2} \frac{\mu W^2}{NRT} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ qu'on peut encore

écrire $X = X_0 \left[1 - (\alpha-1) \frac{\mu W^2 M_a}{2\rho S X_0 RT} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$. La recherche de l'extrémum correspond à

l'annulation de $\frac{dX}{dX_0}$ que nous calculerons, puisque $\alpha = 2,0$, en dérivant $X = \frac{X_0}{1 - \frac{X_1}{X_0}}$ où on a

posé $X_1 = \frac{\mu W^2 M_a}{2\rho SRT}$. La dérivée s'annule pour $X_0 = 2 X_1$ soit $X_0 = \frac{\mu W^2 M_a}{\rho SRT}$, moitié de la solution précédente. On en déduit alors X dont la valeur est $X = \frac{2\mu W^2 M_a}{\rho SRT}$. Numériquement, la longueur du canon est $X = 340\text{m}$ avec de la poudre sur une longueur $X_0 = 170\text{m}$.

□ 21- Avec $a = C^{\text{te}}$, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{v dv}{dx}$ donc $v_0^2 = 2aX_a$ fournit $a = 6,3 \times 10^5 \text{m.s}^{-2} = 6,4 \times 10^4 \text{g}$; à une telle accélération, rien ni personne ne peut résister.

F. Retour sur la sphère d'influence

□ 22- Les trois équations vectorielles du mouvement sont :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_T}{dt^2} = G \left(\frac{m \mathbf{r}_{TL}}{r_{TL}^3} + \frac{\mu \mathbf{r}_{TB}}{r_{TB}^3} \right), \quad \frac{d^2 \mathbf{r}_L}{dt^2} = G \left(-\frac{M_T \mathbf{r}_{TL}}{r_{TL}^3} + \frac{\mu \mathbf{r}_{LB}}{r_{LB}^3} \right) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \mathbf{r}_B}{dt^2} = -G \left(\frac{M_T \mathbf{r}_{TB}}{r_{TB}^3} + \frac{m \mathbf{r}_{LB}}{r_{LB}^3} \right)$$

La différence des première et dernière équation mène à :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_{TB}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}_B}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{r}_T}{dt^2} = -G \left(\frac{(M_T + \mu) \mathbf{r}_{TB}}{r_{TB}^3} + m \left[\frac{\mathbf{r}_{TL}}{r_{TL}^3} + \frac{\mathbf{r}_{LB}}{r_{LB}^3} \right] \right)$$

qui est bien l'équation demandée. Le terme $\mathbf{A}_T$ est celui qu'on écrirait, dans le cadre général de l'étude du mouvement d'un système à deux corps, pour le mouvement de B en l'absence

de la lune, $\frac{M_T \mu}{M_T + \mu} \frac{d^2 \mathbf{r}_{TB}}{dt^2} = -\frac{GM_T \mu \mathbf{r}_{TB}}{r_{TB}^3}$. Le terme de perturbation est beaucoup plus faible en général (car m est plus faible que $M_T + \mu \approx M_T$) sauf lorsque le boulet est très proche de la Lune ($r_{LB} \rightarrow 0$).

□ 23- On procède de même, $\frac{d^2 \mathbf{r}_{LB}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}_B}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{r}_L}{dt^2} = -G(m + \mu) \frac{\mathbf{r}_{LB}}{r_{LB}^3} - GM_T \left(\frac{\mathbf{r}_{TB}}{r_{TB}^3} - \frac{\mathbf{r}_{TL}}{r_{TL}^3} \right)$

où on reconnaît $\frac{d^2 \mathbf{r}_{TB}}{dt^2} + \mathbf{A}_L = \mathbf{P}_T$ avec $\mathbf{A}_L = \frac{G(m + \mu)}{r_{LB}^3} \mathbf{r}_{LB}$ et $\mathbf{P}_T = -GM_T \left(\frac{\mathbf{r}_{TB}}{r_{TB}^3} - \frac{\mathbf{r}_{TL}}{r_{TL}^3} \right)$ ou,

pour expliciter la symétrie des termes des équations 22 et 23, $\mathbf{P}_T = -GM_T \left(\frac{\mathbf{r}_{TB}}{r_{TB}^3} + \frac{\mathbf{r}_{LT}}{r_{LT}^3} \right)$.

□ 24- Déterminons d'abord ρ_T avec les notations de la figure 1, l'axe $O_T O_L$ étant choisi pour

direction de $\mathbf{x}$. On a $\mathbf{P}_T = -GM_T \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{d^2} \right) \mathbf{x}$ et $\mathbf{A}_L = -G(m + \mu) \frac{1}{(d - x)^2} \mathbf{x}$ d'où le rapport

demandé $\rho_T = \frac{P_T}{A_L} = \frac{M_T}{m + \mu} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{d^2} \right) (d - x)^2$ ou, puisque $\mu \ll m$, $\rho_T = \frac{(1 + u)(1 - u)^3}{\varepsilon^2 u^2}$. De

la même façon, $\rho_L = \frac{P_L}{A_T} = \frac{m}{M_T + \mu} \left(\frac{1}{(d - x)^2} - \frac{1}{d^2} \right) x^2$ qu'on écrira dans les mêmes

conditions d'approximation $\rho_L = \varepsilon^2 \frac{u^3(2-u)}{(1-u)^2}$. La relation $\rho_T(u, \varepsilon^2) = \rho_L(1-u, 1/\varepsilon^2)$ est alors immédiatement vérifiée ; elle décrit la symétrie des rôles de la Terre et de la Lune sur l'axe Terre-Lune.

Le point d'équigravité est défini par $u = \xi/d = 0,9$ donc $\rho_T = 0,19$ et $\rho_L = 0,99$.

□ 24- Selon LAGRANGE, la zone d'influence de la Lune commence en $u = 0,865$ soit une distance de la Lune égale à $d(1-u) = 51740\text{km}$. Le rayon calculé par TISSERAND vaut numériquement $d\varepsilon^{4/5} = 66200\text{km}$. Les deux résultats sont comparables, mais pas identiques.