ENSAM 1995: Problème n°2: Interaction gravitationnelle:

1.1. *On supposera que le deux sphères n'ont pas de rotation propre, donc que le système est assimilable à deux masses ponctuelles.*
L'énergie mécanique est la somme des énergie cinétique et potentielle: Em = Ec + Ep.
Soit, avec des notations évidentes: $Ec = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$. Or, O étant le barycentre du système, on a: $m_1 \overrightarrow{OO_1} + m_2 \overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{O}$, ce qui permet d'écrire: $\overrightarrow{OO_1} = \frac{-m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{r}$ et: $\overrightarrow{OO_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{r}$ d'où après dérivation: $\overrightarrow{v_1} = \frac{-m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{v}$ et: $\overrightarrow{v_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{v}$.
On obtient alors après calculs: $Ec = \frac{1}{2}\mu v^2$
Exprimons les forces qui s'exercent sur le système afin de trouver l'énergie potentielle, pour cela, écrivons la RFD pour chacune des deux masses: $m_1 \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2} = \overrightarrow{f}_{1\leftarrow 2} = \frac{m_1 m_2 G}{r^3}\overrightarrow{r}$ et: $m_2 \frac{d^2\overrightarrow{OO_2}}{dt^2} = \overrightarrow{f}_{2\leftarrow 1} = \frac{-m_1 m_2 G}{r^3}\overrightarrow{r}$ alors, en additionnant m_2 fois la première et (- m_1) fois la seconde, on arrive à la RFD pour la particule fictive: $\mu\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = \frac{-m_1 m_2 G}{r^3}\overrightarrow{r} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,Ep$, une simple intégration nous donne alors: $Ep = \frac{-m_1 m_2 G}{r} + cte$ où on choisit, par exemple une Ep nulle à l'infini, c'est-à-dire cte = 0.
Donc: $Ep = \frac{-m_1 m_2 G}{r}$ ainsi: $Em = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{m_1 m_2 G}{r}$. Il est bien clair qu'il est impossible d'écrire Em seulement en fonction de r, v et μ...

L'énergie se conserve car on a affaire à un système isolé dont les forces intérieures ne sont pas dissipatrices (pas de frottement).
Cette énergie mécanique dépend de la vitesse initiale et des positions initiales des deux objets.
Il est bien évident que cette expression n'est valide que si les deux masses ne se touchent pas, donc $r_1 + r_2 < r$.

1.2. Le moment cinétique par rapport à O du système des deux particules est: $\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{OO_1} \wedge m_1\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{OO_2} \wedge m_2\overrightarrow{v_2}$. En reportant ici les expressions des vecteurs $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{OO_2}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, on obtient: $\overrightarrow{\sigma} = \mu\overrightarrow{r}\wedge\overrightarrow{v}$. On reconnaît là l'expression du moment cinétique de la particule fictive. Ce moment cinétique est un vecteur constant puisque la force exercée sur la particule fictive est une force centrale de centre O (voir ci-dessus la RFD de la particule fictive), ainsi le moment de cette force par rapport à O est nul et le moment cinétique ne peut donc pas varier, ni en norme ni en direction.
Le mouvement obtenu est celui d'une particule dans une force centrale, c'est-à-dire une trajectoire plane ayant la forme d'une conique (ellipse, parabole ou branche d'hyperbole).

2.1. Avec les nouvelles notations, on a: $r_1 = \frac{M}{M+m}r$ donc l'erreur relative commise en considérant que O est au centre de la Terre (c'est-à-dire confondu avec O_2) est: $\frac{r-r_1}{r} = \frac{m}{M+m} = 1,34.10^{-22}$ donc extrêmement faible!
De même, on trouve que: $m = m\left(1 - \frac{m}{M}\right) = m\hat{}1,34.10^{-22} prs$!

2.2. On obtient alors des formes plus simples: $Em = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{r}$ et: $\overrightarrow{\sigma} = m\overrightarrow{r}\wedge\overrightarrow{v}$. La vitesse $\overrightarrow{v}$ est maintenant la vitesse du satellite dans le référentiel géocentrique supposé être galiléen.

2.3. Plaçons-nous en coordonnées cylindriques, le plan (r, θ) étant le plan du mouvement: $\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r}$ donc en dérivant par rapport au temps: $\overrightarrow{v} = \dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta}$, on a ainsi: $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$. Or: $\overrightarrow{\sigma} = m\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v} = mr^2\dot{\theta}.\overrightarrow{u_z} = \sigma.\overrightarrow{u_z}$. Avec ces notations, il est clair que: $v^2 = \dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{m^2 r^2}$. Donc, en reportant dans l'expression de Em, on obtient: $Em = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{s^2}{m^2 r^2}\right) - \frac{mMG}{r}$.

Effectuons maintenant le passage à la variable $u = \frac{1}{r}$. On a: $\frac{du}{dq} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dq} = \frac{-1}{r^2}\frac{dr}{dq}$, or: $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta}$ donc: $\dot{r} = -r^2\dot{\theta}\frac{du}{d\theta} = \frac{-\sigma}{m}\frac{du}{d\theta}$. Alors, en reportant dans l'expression de l'énergie mécanique, on a: $Em = \frac{s^2}{2m}\left(\frac{du}{dq}\right)^2 + \frac{s^2u^2}{2m} - mMGu$.

C'est-à-dire: $\left(\frac{du}{dq}\right)^2 + (u - \beta)^2 = \beta^2 g$ avec: $\beta = \frac{m^2MG}{\sigma^2}$ et: $\gamma = 1 + \frac{2\sigma^2 Em}{m^3M^2G^2}$. Il est bien clair que β et γ ne peuvent pas être mis seulement en fonction des données du problème mais aussi de σ et Em...

2.4. Posons le changement de variable: X = u - β, l'équation différentielle précédente devient: $\left(\frac{dX}{dq}\right)^2 + X^2 = \beta^2 g$. Dérivons cette équation par rapport à θ: $\frac{d^2X}{d\theta^2} + X = 0$ qui s'intègre en: $X = \frac{1}{d}cos\left(q - q_o\right) = u - \beta$, soit: $u = \beta + \frac{1}{d}cos\left(q - q_o\right)$, d et θ_o sont des constantes d'intégration, on pose: $e = \frac{1}{d\beta}$, on obtient donc une solution de la forme proposée dans l'énoncé. Il nous reste à trouver d et e; pour cela nous allons calculer chacun des termes de l'équation différentielle $\left(\frac{dX}{dq}\right)^2 + X^2 = \beta^2 g$:

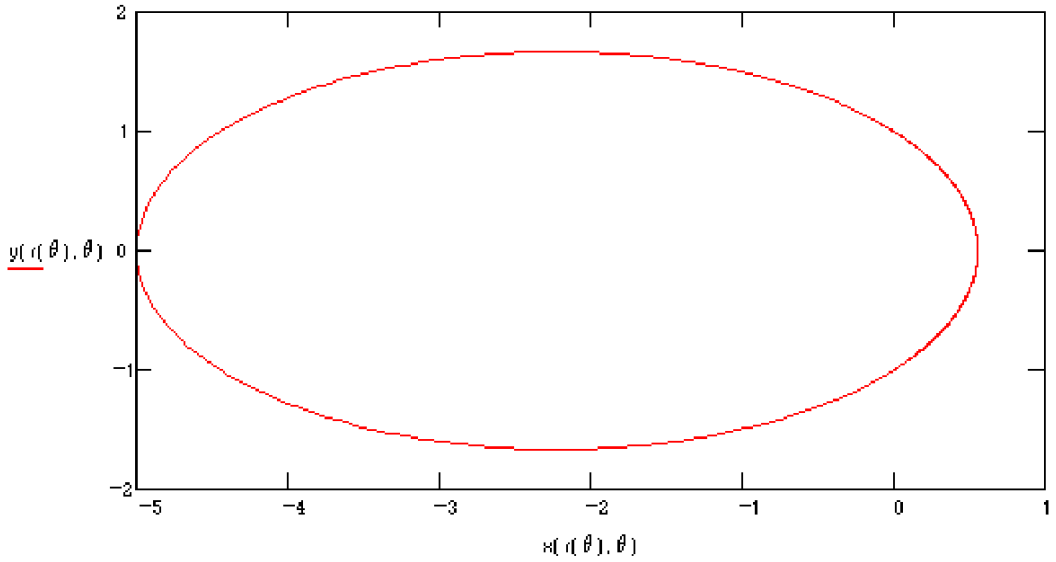
$\frac{dX}{dq} = \frac{-1}{d}sin\left(q - q_o\right)$ d'où en reportant, on trouve: $\frac{1}{d^2} = \beta^2\gamma$ soit: $d = \frac{1}{\beta\sqrt{\gamma}}$ et comme $e = \frac{1}{d\beta}$, on en déduit: $e = \sqrt{\gamma}$.

e est l'excentricité de la conique, d.e est le paramètre.

Lorsque $\theta_o = 0$, on a: $r = \frac{de}{1 + e.\cos\theta}$ qui est l'équation d'une conique de foyer O.

Traçons cette conique dans le cas d'une ellipse:

$\theta := 0, .01 .. 2 \cdot \pi$ $\quad r(\theta) := \dfrac{1}{1 + 0.8 \cdot \cos(\theta)}$ $\quad x(r, \theta) \equiv r \cdot \cos(\theta)$ $\quad y(r, \theta) \equiv r \cdot \sin(\theta)$



2.5. Pour qu'un observateur terrestre voit apparaître le satellite de façon périodique, la courbe doit être fermée, c'est-à-dire: $\forall\theta$ r est fini, donc: $q, 1 + e\,.\,cos\,left\,(q - q\,rSub\,\{\,size\,8\{o\}\,\}\,right\,)^{1}0\}\,\{$ donc -1 < e < 1, mais comme on a choisi e > 0, la condition de mouvement périodique est: $e<1$.

Or on a: $e^2=\gamma=1+\dfrac{2\sigma^2 Em}{m^3M^2G^2}<1$ c'est-à-dire: $Em<0$.

2.6. On sait (cf. 2.3.) que $Em=\frac{1}{2}m\left(r^{\cdot 2}+\frac{s^2}{m^2r^2}\right)-\frac{mMG}{r}$, or au périgée: r = a, r est minimal donc $\dot{r}=0$, et $\vec{r}\perp\vec{v}$ donc $\sigma=m.a.v_p$, ainsi: $Em=\dfrac{mv_p^2}{2}-\dfrac{mMG}{a}$.

Par ailleurs, on sait que (cf. 2.5.) $e^2=1+\dfrac{2\sigma^2 Em}{m^3M^2G^2}$ donc: $Em=\frac{mM^2G^2\left(e^2-1\right)}{2a^2v_p^2}$, en éliminant Em on obtient alors l'équation bicarrée suivante: $v_p^4-\frac{2MG}{a}v_p^2-\frac{M^2G^2\left(e^2-1\right)}{a^2}=0$. Les solutions sont: $v_p^2=\frac{MG(1\pm e)}{a}$, or le périgée correspond à r minimal donc v maximale (transfert d'énergie entre Ep et Ec), contrairement à l'apogée (l'autre solution de cette équation) pour lequel r est maximal donc v minimale. Aussi on peut affirmer que $v_p^2=\frac{MG(1+e)}{a}$ donc: $v_p=\sqrt{\frac{MG(1+e)}{a}}$ puisque la norme d'une vitesse est positive.

2.7. Pour un satellite géostationnaire la trajectoire est un cercle de centre O, donc l'excentricité e = 0. C'est pourquoi on a une vitesse uniforme tout au long de la trajectoire (pas de transfert entre Ec et Ep puisque Ep = cte). On obtient donc facilement la vitesse sur la trajectoire en prenant e = 0 dans le résultat de la question précédente: $v=\sqrt{\dfrac{MG}{a}}$ où a est le rayon de la trajectoire. Or un satellite géostationnaire reste toujours à la verticale du même lieu, il est donc clair que la période de sa rotation autour de la Terre est identique à la période de rotation propre de la Terre, c'est-à-dire un jour soit T = 86400 s.

Cependant, lors d'un mouvement circulaire uniforme, on a: $v=a\omega=\dfrac{2\pi a}{T}$ si le rayon est a = R_T + h. On trouve alors: $h=\left(\frac{MGT^2}{4p^2}\right)^{13}-R_T=35841km$ ce résultat est bien conforme à la réalité.