

7. Разложение многочлена на множители

МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Преобразование многочлена в произведение двух или нескольких многочленов (среди которых могут быть и одночлены) называется **разложением многочлена на множители**.

Разложение многочлена на множители способом вынесения общего множителя за скобки

Вынести за скобки общий множитель: $4x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 18x$.

1) Каждый член многочлена $4x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 18x$ можно заменить произведением двух множителей, один из которых равен $2x$: $2x \cdot 2x^3 - 2x \cdot 4x^2 + 2x \cdot x - 2x \cdot 9$.

2) Воспользуемся распределительным законом умножения и вынесем $2x$ - общий множитель за скобки: $2x(2x^3 - 4x^2 + x - 9)$.

Получим: $4x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 18x = 2x(2x^3 - 4x^2 + x - 9)$.

Разложение многочлена на множители способом группировки

Если члены многочлена не имеют общего множителя, отличного от 1, то можно попытаться разложить такой многочлен способом группировки.

Для этого надо объединить в группы те члены, которые имеют общие множители, и вынести за скобки общий член каждой группы. Если после таких преобразований окажется общий множитель у всех получившихся групп, то его вынести за скобки.

Разложить многочлен на множители: $10ay - 5cy + 2ax - cx$.

1) Объединим в первую группу $10ay$ и $2ax$, а во вторую группу $-5cy$ и $-cx$: ($10ay$ и $2ax$) + ($-5cy$ и $-cx$).

2) В первой группе вынесем за скобки общий множитель $2a$, во второй группе вынесем за скобки общий множитель $-c$: $2a(5y+x) - c(5y+x)$.

3) Как видим, оба члена многочлена имеют общий множитель $(5y+x)$, вынесем его за скобки: $(5y+x)(2a-c)$.

Получим: $10ay - 5cy + 2ax - cx = (5y+x)(2a-c)$.

Формулы сокращенного умножения

Разложить некоторые многочлены на множители можно при помощи формул сокращенного умножения.

1. $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

2. $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$

3. $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$

4. $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

5. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

6. $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x+y)^3$

7. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x-y)^3$.

Разложить на множители: $2x^2 - 4x + 2$.

1) Вынесем 2 - общий множитель за скобки: $2(x^2 - 2x + 1)$.

2) Воспользуемся формулой №3 - квадрат разности: $2(x-1)^2$.
Получим: $2x^2-4x+2=2(x-1)^2$.

Разложение квадратного трехчлена на множители

Выражение вида ax^2+bx+c называется квадратным трехчленом.

Если дискриминант квадратного трехчлена больше нуля, то этот трехчлен можно представить в виде $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 - корни трехчлена.

Если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, то этот трехчлен можно представить в виде $ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$, где x_1 - корень трехчлена.

Разложить на множители: x^2+5x-6

$$D=5^2-4\cdot1\cdot(-6)=25+24=49=7^2$$

$$x_1=(-5+7):2=1, \quad x_2=(-5-7):2=-6.$$

Получим: $x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. а) Известно, что a и b - цифры. Выпишите формулу, выражающую число x , состоящее из a сотен, 7 десятков и b единиц:

1) $x=100b+70+a$; 2) $x=100a+70+b$; 3) $x=ab$; 4) $x=700+10a+b$.

б) Известно, что m и n - цифры. Выпишите формулу, выражающую число y , состоящее из 5 сотен, m десятков и n единиц:

1) $y=100m+50+n$; 2) $y=100n+50+m$; 3) $y=5mn$; 4) $y=500+10m+n$.

Решение:

а) a сотен - это $100a$, 7 десятков - это 70, b единиц - это просто b . Число $x=100a+70+b$

Ответ: 2)

2. а) Известно, что $s-t=-1,3$. Укажите выражение, значение которого равно 2,6:

1) $(t-s)^2$; 2) $(t-s):2$; 3) $2(t-s)$; 4) $s-t-1,3$.

б) Известно, что $m-n=-2,1$. Укажите выражение, значение которого равно 4,2:

1) $(n-m)^2$; 2) $(m-n):2$; 3) $-2(m-n)$; 4) $m-n-2,1$.

Решение:

а) Т.к. $s-t=-1,3$, то $t-s=1,3$. 1) $(t-s)^2=1,3^2=1,69$; 2) $(t-s):2=1,3:2=0,65$;

3) $2(t-s)=2\cdot1,3=2,6$; 4) $s-t-1,3=-1,3-1,3=-2,6$.

Ответ: 3).

3. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2-7x+10$; б) $x^2-10x+16$.

Решение:

а) Найдем дискриминант: $D=49-40=9$. Вычислим корни: $x_1=(7+3):2=5$; $x_2=(7-3):2=2$. Тогда $x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$.

Ответ: $(x-5)(x-2)$.

4. Сократите дробь:

$$\text{а) } \frac{18ab - 27b}{9ab}; \quad \text{б) } \frac{14xy - 35y}{7xy}$$

Решение:

а) В числителе вынесем за скобки общий множитель $9b$:

$$\text{а) } \frac{18ab - 27b}{9ab} = \frac{9b(2a - 3)}{9ab} = \frac{2a - 3}{b}$$

5. Сократите дробь:

$$\text{а) } \frac{m^2 - n^2}{3m + 3n}; \quad \text{б) } \frac{a^2 - b^2}{2a - 2b}$$

Решение:

а) В числите воспользуемся формулой разности квадратов, в знаменателе вынесем общий множитель 3 за скобки.

$$\text{а) } \frac{m^2 - n^2}{3m + 3n} = \frac{(m - n)(m + n)}{3(m + n)} = \frac{m - n}{3}.$$

6. Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{24a^3}{27} \cdot \left(-\frac{14x^5}{105a}\right) : \frac{16a^2}{15x^3}; \quad \text{б) } \frac{90x^3}{49y^2} \cdot \frac{63y^2}{45x^2} : \frac{6x}{7y}$$

Решение:

а)

$$\text{а) } \frac{24a^3}{27} \cdot \left(-\frac{14x^5}{105a}\right) : \frac{16a^2}{15x^3} = -\frac{24a^3}{27} \cdot \frac{14x^5}{105a} \cdot \frac{15x^3}{16a^2} = -\frac{24 \cdot 14 \cdot 15 \cdot a^3 \cdot x^5 \cdot x^3}{27 \cdot 105 \cdot 16 \cdot a \cdot a^2} = -\frac{3 \cdot 14 \cdot 1 \cdot x^8}{27 \cdot 7 \cdot 2} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot x^8}{9 \cdot 2} = -\frac{x^8}{9}.$$

7. Разложите многочлен на множители:

а) $2x+4y-xy-2y^2$; б) $xy-6x+3y-2x^2$.

Решение:

а) Сгруппируем первое со вторым слагаемые и третье с четвертым:

$$2x+4y-xy-2y^2=(2x+4y)+(-xy-2y^2)=2(x+2y)-y(x+2y)=(x+2y)(2-y).$$

Ответ: $(x+2y)(2-y)$.

8. Найдите, при каких значениях переменной не имеет смысла выражение:

$$\text{а) } \frac{6a}{a^2 - 16a}; \quad \text{б) } \frac{7x}{x^2 - 3x}$$

Решение:

а) Выражение не имеет смысла, если знаменатель равен нулю. Найдём значения

переменной x , при которых $a^2 - 16a$ равно нулю:

$$a^2 - 16a = 0,$$

$$a(a - 16) = 0,$$

$$a = 0 \text{ или } a - 16 = 0,$$

$$a = 0 \text{ или } a = 16.$$

Ответ: 0; 16.

9. Сократите дробь:

$$\text{а) } \frac{a^2 + 5ab + a}{5b^2 + ab + b}; \quad \text{б) } \frac{3a^2 + ab + a}{b^2 + 3ab + b}$$

Решение:

а) Вынесем в числителе общий множитель a за скобки, в знаменателе за скобки вынесем общий множитель b :

$$\frac{a^2 + 5ab + a}{5b^2 + ab + b} = \frac{a(a + 5b + 1)}{b(5b + a + 1)} = \frac{a}{b}$$

10. Сократите дробь:

$$\text{а) } \frac{3\sqrt{x} + x\sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}}; \quad \text{б) } \frac{11\sqrt{x} - x\sqrt{11}}{\sqrt{11} - \sqrt{x}}$$

Решение:

$$\text{а) } \frac{3\sqrt{x} + x\sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{x}(\sqrt{3} + \sqrt{x})}{\sqrt{3} + \sqrt{x}} = \sqrt{3x}.$$

11. Разложите на множители:

$$\text{а) } 2x^2 - 20xy + 50y^2 - 2; \quad \text{б) } 3x^2 + 12y^2 + 12xy - 12.$$

Решение:

а) Вынесем общий множитель 2 за скобки, затем воспользуемся формулой квадрата разности и формулой разности квадратов:

$$2x^2 - 20xy + 50y^2 - 2 = 2(x^2 - 10xy + 25y^2 - 1) = 2((x - 5y)^2 - 1) = 2(x - 5y - 1)(x - 5y + 1).$$

Ответ: $2(x - 5y - 1)(x - 5y + 1)$.

12. Сократите дробь (№ 2/4/17 [7]):

$$\text{а) } \frac{12x^2 - 9xy + 4xz - 3yz}{20x^2 + 3yz - 15xy - 4xz}; \quad \text{б) } \frac{15x^2 + 2yz - 5xz - 6xy}{4yz - 15x^2 - 10xz + 6xy}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{12x^2 - 9xy + 4xz - 3yz}{20x^2 + 3yz - 15xy - 4xz} &= \frac{(12x^2 - 9xy) + (4xz - 3yz)}{(20x^2 - 15xy) + (3yz - 4xz)} = \frac{3x(4x - 3y) + z(4x - 3y)}{5x(4x - 3y) + z(3y - 4x)} \\ &= \frac{(4x - 3y)(3x + z)}{(4x - 3y)(5x - z)} = \frac{3x + z}{5x - z}. \end{aligned}$$

13. Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{(5a - 2)^2 + 2(25a^2 - 4) + (5a + 2)^2}{(5a + 2)^2 - 2(25a^2 - 4) + (5a - 2)^2}; \quad \text{б) } \frac{2(16a^2 - 25) - (4a + 5)^2 - (4a - 5)^2}{(4a + 5)^2 + 2(16a^2 - 25) + (4a - 5)^2}.$$

Решение:

а) $2(25a^2 - 4)$ можно представить в виде $2(5a - 2)(5a + 2)$, тогда в числителе воспользуемся формулой квадрата суммы, а в знаменателе - квадрата разности:

$$\frac{(5a - 2)^2 + 2(25a^2 - 4) + (5a + 2)^2}{(5a + 2)^2 - 2(25a^2 - 4) + (5a - 2)^2} = \frac{((5a - 2) + (5a + 2))^2}{((5a + 2) - (5a - 2))^2} = \frac{(10a)^2}{4^2} = \frac{100a^2}{16} = 6,25a^2$$

14. а) Первое натуральное число при делении на 5 дает остаток 2, а другое - остаток 3. Найдите, какой остаток получится при делении на 5 удвоенного произведения этих чисел.

б) Первое натуральное число при делении на 9 дает остаток 6, а другое - остаток 1. Найдите, какой остаток получится при делении на 9 произведения суммы и разности этих чисел.

Решение:

а) Обозначим первое число x , тогда используя формулу деления с остатком его можно записать следующим образом: $x = 5b + 2$.

Обозначим второе число y , по формуле деления с остатком $y = 5a + 3$.

Найдем удвоенное произведение этих чисел:

$$2xy = 2(5b + 2)(5a + 3) = (10b + 4)(5a + 3) = 50ab + 30b + 20a + 12 = 5(10ab + 6b + 4a + 2) + 2.$$

Мы представили удвоенное произведение в виде формулы деления с остатком на 5, следовательно остаток равен 2.

Ответ: 2.

15. Найдите x из пропорции (№ 2.5.28 [7]):

$$\text{а) } \frac{25 - n^2 - 2nm - m^2}{n^2 + nm + 5m - 25} = \frac{5 + n + m}{x}; \quad \text{б) } \frac{k + n - m}{x} = \frac{m^2 - n^2 - 2nk - k^2}{n^2 + nm - mk - k^2}$$

Решение:

а) Преобразуем числитель первой дроби:

$$25 - n^2 - 2nm - m^2 = 25 - (n^2 + 2nm + m^2) = 5^2 - (n + m)^2 = (5 - (n + m))(5 + (n + m)) = (5 - n - m)(5 + n + m).$$

Преобразуем знаменатель первой дроби:

$$n^2 + nm + 5m - 25 = (n^2 - 25) + (nm + 5m) = (n - 5)(n + 5) + m(n + 5) = (n + 5)(n - 5 + m).$$

Подставим в пропорцию результаты, которые получили:

$$\frac{(5-n-m)(5+n+m)}{(n+5)(n-5+m)} = \frac{5+n+m}{x};$$

$$\frac{(5-n-m)}{(n+5)(n-5+m)} = \frac{1}{x};$$

$$x = \frac{(n+5)(n-5+m)}{5-n-m} = \frac{(n+5)(n-5+m)}{-(n+m-5)} = -(n+5) = -n-5.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Выпишите выражение, являющееся квадратом разности выражений t и $5m$:

1) $t^2 - (5m)^2$; 2) $(t-5m)^2$; 3) $t^2 : 25m^2$; 4) $(5mt)^2$; 5) $t^2 - 5m$.

2. Результатом разложения на множители многочлена $a^2c^2 - 4$ является выражение:

1) $-2(a-c)(a+c)$; 2) $a^2(c-2)(c+2)$; 3) $(ac-2)(ac+2)$; 4) $(ac-2)^2$.

3. Разложите на множители:

1) $27c^2 - 75$; 2) $12x^2 - 27$.

4. Сократите дробь:

$$1) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 2xy}; \quad 2) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 2xy}.$$

5. Разложите на множители:

1) $8x^2y^2 - 72x^2z^2$; 2) $5x^2y^2 - 80x^2z^2$; 3) $2x + 4y - xy - 2y^2$; 4) $3x - 6y + xy - 2y^2$.

6. Сократите дробь:

$$1) \frac{9x^2 - 6x + 1}{6x^2 + x - 1}; \quad 2) \frac{8x^2 - 2x - 1}{16x^2 + 8x + 1}$$

7. Разложите на множители:

1) $b^2c^2 - 4bc - b^2 - c^2 + 1$; 2) $a^2 + x^2 - a^2x^2 + 4ax - 1$.

8. Найдите значение выражения:

$81x^2 + 4y^2 + 9x - 2y - 36xy + 5$, если $4,5x - y = 1,5$

9. Разложите на множители:

1) $(a^2 + a + 4)^2 + 8a(a^2 + a + 4) + 15a^2$ 2) $(a^2 + 4a + 8)^2 + 3a(a^2 + 4a + 8) + 2a^2$.

10. Сократите дробь:

$$1) \frac{a^4 + 2a^2 - 3}{a^3 - 2a^2 - a + 2}; \quad 2) \frac{a^4 - 4a^2 + 3}{a^3 + 2a^2 - a - 2}$$