

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП**

---

**9 КЛАСС**

**1 вариант**

**Задание 1**

Решите в целых числах уравнение  $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{3}$ . В качестве ответа укажите одно из возможных решений (в формате (x;y;z)) и общее число возможных решений.

**Решение:** Преобразовав уравнение, например, в  $3x + \frac{3z}{yz+1} - 10 = 0$ , можно получить, что  $yz$  равно 2 или -4. Рассмотрев все случаи, можно найти все пять возможных решений.

**Ответ:** Возможных решений пять: (2; 1; -4), (3; 2; 1), (3;4;-1), (4;-1;-2), (4;-2;2).

**Задание 2**

Решите систему уравнений

$$\{a + b + c = 4, b + c + d = -5, c + d + a = 0, d + a + b = -8.$$

**Решение:** Сложив все уравнения, получим  $3(a + b + c + d) = -9$ , или  $a + b + c + d = -3$ . Значит,  $a = (a + b + c + d) - (b + c + d) = -3 - (-5) = 2$ . Аналогично находим остальные неизвестные..

**Ответ:**  $a = 2; b = -3; c = 5; d = -7$ .

**Задание 3**

Решите в целых числах уравнение:  $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ .

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП**

---

**Решение:** Единственным корнем является  $x = 1$ . Других решений нет, поскольку функция монотонно возрастает.

**Ответ:** 1.

#### **Задание 4**

В конце первого круга футбольного чемпионата Азербайджана (то есть все команды сыграли каждая с каждой по одному разу) у всех команд одинаковое количество набранных очков. Каково наибольшее возможное значение этого количества, если за победу команда получает 3 очка, 1 за ничью и 0 за поражение? В чемпионате Азербайджана выступает 8 команд.

**Решение:** Всего сыграно 28 матчей. Максимальное возможное количество очков равно 84, соответственно, верно неравенство  $8x \leq 84$ , где  $x$  – число очков каждой команды. Наибольшее подходящее целочисленное значение  $x$  равно 10. Такая ситуация возможна, если каждая команда выиграла 3 игры, сыграла одну игру вничью и проиграла 3 игры.

**Ответ:** 10.

#### **Задание 5**

Группа туристов идет по прямой с постоянной скоростью мимо горы, регулярно измеряя расстояние до неё. Расстояния равнялись 8, 6 и 13 километров в 8, 10 и 11 часов соответственно. Каким было расстояние до горы в 9 часов? Чему оно будет равно в 12 часов?

**Решение:** Составим систему уравнений

$$\{d^2 + x^2 = 64, d^2 + (x - 2v)^2 = 36, d^2 + (x - 3v)^2 = 169.$$

Отсюда  $d = 0$ ,  $x = 8$ ,  $v = 7$ . Можно получить искомые расстояния – 1 километр в 9 часов и 20 километров в 12 часов.

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП**

---

**Ответ:** 1 км, 20 км.

**Задание 6**

Дана трапеция  $ABCD$ ,  $BC$  и  $AD$  — её основания. Угол  $BAD$  равен  $120^\circ$ , а  $AC$  является его биссектрисой. Описанная около треугольника  $ABD$  окружность имеет диаметр, равный  $2\sqrt{3}$ .  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$ , и площади треугольников  $AOD$  и  $BOC$  относятся как 4:1. Найдите все стороны трапеции  $ABCD$ . Введите в качестве ответов квадраты их величин.

**Решение:** Поскольку  $AC$  – биссектриса угла  $BAD$ , углы  $BAC$  и  $CAD$  равны  $60^\circ$ . Из-за свойств трапеции то же значение и у угла  $ACB$ , соответственно, треугольник  $ABC$  – равносторонний. Обозначим длину его стороны за  $a$ .

Благодаря подобию треугольников  $AOD$  и  $BOC$ , можно найти, что  $AD = 2a$ .

Если  $D$  – диаметр окружности, описанной около  $ABD$ , то

$$BD = D \sin \angle BAD = 3.$$

По теореме косинусов можем записать, что

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD,$$

откуда находим, что  $a = \frac{3}{\sqrt{7}}$ . Наконец, по теореме косинусов находим, что

$$CD = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

**Ответ:**  $AB = BC = \frac{3}{\sqrt{7}}$ ,  $CD = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ ,  $AD = \frac{6}{\sqrt{7}}$ . Соответственно,  $AB^2 = BC^2 = \frac{9}{7}$

,  $CD^2 = \frac{27}{7}$ ,  $AD^2 = \frac{36}{7}$

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП**

---

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП**

---

**9 КЛАСС**

**2 вариант**

**Задание 1**

Решите в целых числах уравнение  $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{9}{7}$ . В качестве ответа укажите одно из возможных решений (в формате (x;y;z)) и общее число возможных решений.

**Решение:** Преобразовав уравнение, например, в  $7x + \frac{7z}{yz+1} - 9 = 0$ , можно получить, что  $yz$  равно 6 или -8. Рассмотрев все случаи, можно найти все два возможных решения.

**Ответ:** Возможных решения два: (1; 3; 2), (1; 4; -2).

**Задание 2**

Решите систему уравнений

$$\{a + b + c = 6, b + c + d = -1, c + d + a = 0, d + a + b = 4.$$

**Решение:** Сложив все уравнения, получим  $3(a + b + c + d) = 9$ , или  $a + b + c + d = 3$ . Значит,  $a = (a + b + c + d) - (b + c + d) = 3 - (-1) = 4$ . Аналогично находим остальные неизвестные.

**Ответ:**  $a = 4; b = 3; c = -1; d = -3$ .

**Задание 3**

Решите в целых числах уравнение:  $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 5 = 0$ .

**Решение:** Единственным корнем является  $x = 1$ . Других решений нет, поскольку функция монотонно возрастает.

**Ответ:** 1.

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП**

---

**Задание 4**

В конце первого круга футбольного чемпионата Австрии (то есть все команды сыграли каждая с каждой по одному разу) у всех команд одинаковое количество набранных очков. Каково наибольшее возможное значение этого количества, если за победу команда получает 3 очка, 1 за ничью и 0 за поражение? В чемпионате Австрии выступает 12 команд.

**Решение:** Всего сыграно 66 матчей. Максимальное возможное количество очков равно 198, соответственно, верно неравенство  $12x \leq 198$ , где  $x$  – число очков каждой команды. Наибольшее подходящее целочисленное значение  $x$  равно 16. Такая ситуация возможна, если каждая команда выиграла 5 игр, сыграла одну игру вничью и проиграла 5 игр.

**Ответ:** 16.

**Задание 5**

Группа туристов идет по прямой с постоянной скоростью мимо горы, регулярно измеряя расстояние до неё. Расстояния равнялись 5, 1 и 4 километров в 8, 10 и 11 часов соответственно. Каким было расстояние до горы в 9 часов? Чему оно будет равно в 12 часов?

**Решение:** Составим систему уравнений

$$\{d^2 + x^2 = 25, d^2 + (x - 2v)^2 = 1, d^2 + (x - 3v)^2 = 16.$$

Отсюда  $d = 0$ ,  $x = 5$ ,  $v = 3$ . Можно получить искомые расстояния – 2 километра в 9 часов и 7 километров в 12 часов.

**Ответ:** 2 км, 7 км.

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП**

---

**Задание 6**

Дана трапеция  $ABCD$ ,  $BC$  и  $AD$  — её основания. Угол  $BAD$  равен  $120^\circ$ , а  $AC$  является его биссектрисой. Описанная около треугольника  $ABD$  окружность имеет диаметр, равный  $4\sqrt{3}$ .  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$ , и площади треугольников  $AOD$  и  $BOC$  относятся как 4:1. Найдите все стороны трапеции  $ABCD$ . Введите в качестве ответов квадраты их величин.

**Решение:** Поскольку  $AC$  – биссектриса угла  $BAD$ , углы  $BAC$  и  $CAD$  равны  $60^\circ$ . Из-за свойств трапеции то же значение и у угла  $ACB$ , соответственно, треугольник  $ABC$  – равносторонний. Обозначим длину его стороны за  $a$ .

Благодаря подобию треугольников  $AOD$  и  $BOC$ , можно найти, что  $AD = 2a$ .

Если  $D$  – диаметр окружности, описанной около  $ABD$ , то

$$BD = D \sin \angle BAD = 6.$$

По теореме косинусов можем записать, что

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD,$$

откуда находим, что  $a = \frac{6}{\sqrt{7}}$ . Наконец, по теореме косинусов находим, что

$$CD = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

**Ответ:**  $AB = BC = \frac{6}{\sqrt{7}}$ ,  $CD = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ ,  $AD = \frac{12}{\sqrt{7}}$ . Соответственно,  $AB^2 = BC^2 =$

$$\frac{36}{7}, CD^2 = \frac{108}{7}, AD^2 = \frac{144}{7}$$

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП**

---