МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

9 КЛАСС

1 вариант

Задание 1

Решите в целых числах уравнение $x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{10}{3}$. В качестве ответа укажите одно из возможных решений (в формате (x;y;z)) и общее число возможных решений.

Решение: Преобразовав уравнение, например, в $3x + \frac{3z}{yz+1} - 10 = 0$,можно получить, что yz равно 2 или -4. Рассмотрев все случаи, можно найти все пять возможных решений.

Ответ: Возможных решений пять: (2; 1; -4), (3; 2; 1), (3;4;-1), (4;-1;-2), (4;-2;2).

Задание 2

Решите систему уравнений

$$\{a + b + c = 4,\ b + c + d =- 5,\ c + d + a = 0,\ d + a + b =- 8.$$

Решение: Сложив все уравнения, получим $3(a + b + c + d) = –9$, или $a + b + c + d = –3$. Значит, $a = (a + b + c + d) – (b + c + d) = –3 – (–5) = 2$. Аналогично находим остальные неизвестные..

Ответ: $a = 2$; $b = −3$; $c = 5$; $d = −7$.

Задание 3

Решите в целых числах уравнение: $x^3 + x^2 + x – 3 = 0$.

Решение: Единственным корнем является $x = 1$. Других решений нет, поскольку функция монотонно возрастает.

Ответ: 1.

Задание 4

В конце первого круга футбольного чемпионата Азербайджана (то есть все команды сыграли каждая с каждой по одному разу) у всех команд одинаковое количество набранных очков. Каково наибольшее возможное значение этого количества, если за победу команда получает 3 очка, 1 за ничью и 0 за поражение? В чемпионате Азербайджана выступает 8 команд.

Решение: Всего сыграно 28 матчей. Максимальное возможное количество очков равно 84, соответственно, верно неравенство $8x \leq 84$, где x – число очков каждой команды. Наибольшее подходящее целочисленное значение x равно 10. Такая ситуация возможна, если каждая команда выиграла 3 игры, сыграла одну игру вничью и проиграла 3 игры.

Ответ: 10.

Задание 5

Группа туристов идет по прямой с постоянной скоростью мимо горы, регулярно измеряя расстояние до неё. Расстояния равнялись 8, 6 и 13 километров в 8, 10 и 11 часов соответственно. Каким было расстояние до горы в 9 часов? Чему оно будет равно в 12 часов?

Решение: Составим систему уравнений

$$\{d^2 + x^2 = 64,\ d^2 + (x - 2v)^2 = 36,\ d^2 + (x - 3v)^2 = 169.$$

Отсюда $d = 0$, $x = 8$, $v = 7$. Можно получить искомые расстояния – 1 километр в 9 часов и 20 километров в 12 часов.

Ответ: 1 км, 20 км.

Задание 6

Дана трапеция *ABCD*, *BC* и *AD* — её основания. Угол *BAD* равен 120°, а *AC* является его биссектрисой. Описанная около треугольника *ABD* окружность имеет диаметр, равный $2\sqrt{3}$. *AC* и *BD* пересекаются в точке *O*, и площади треугольников *AOD* и *BOC* относятся как 4:1. Найдите все стороны трапеции *ABCD*. Введите в качестве ответов квадраты их величин.

Решение: Поскольку *AC* – биссектриса угла *BAD*, углы *BAC* и *CAD* равны 60°. Из-за свойств трапеции то же значение и у угла *ACB*, соответственно, треугольник *ABC* – равносторонний. Обозначим длину его стороны за *a*.

Благодаря подобию треугольников *AOD* и *BOC*, можно найти, что $AD = 2a$.

Если *D* – диаметр окружности, описанной около *ABD*, то

$$BD = D\,sin\angle BAD = 3.$$

По теореме косинусов можем записать, что

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\cdot AD\cos\angle BAD,$$

откуда находим, что $a = \frac{3}{\sqrt{7}}$. Наконец, по теореме косинусов находим, что $CD = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Ответ: $AB = BC = \frac{3}{\sqrt{7}}$, $CD = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, $AD = \frac{6}{\sqrt{7}}$. Соответственно, $AB^2 = BC^2 = \frac{9}{7}$, $CD^2 = \frac{27}{7}$, $AD^2 = \frac{36}{7}$

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

9 КЛАСС

2 вариант

Задание 1

Решите в целых числах уравнение $x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{9}{7}$. В качестве ответа укажите одно из возможных решений (в формате (x;y;z)) и общее число возможных решений.

Решение: Преобразовав уравнение, например, в $7x + \frac{7z}{yz+1} - 9 = 0$,можно получить, что yz равно 6 или -8. Рассмотрев все случаи, можно найти все два возможных решения.

Ответ: Возможных решения два: (1; 3; 2), (1; 4; -2).

Задание 2

Решите систему уравнений

$$\{a + b + c = 6,\ b + c + d =- 1,\ c + d + a = 0,\ d + a + b = 4.$$

Решение: Сложив все уравнения, получим $3(a + b + c + d) = 9$, или $a + b + c + d = 3$. Значит, $a = (a + b + c + d) – (b + c + d) = 3 – (–1) = 4$. Аналогично находим остальные неизвестные.

Ответ: $a = 4$; $b = 3$; $c = -1$; $d = -3$.

Задание 3

Решите в целых числах уравнение: $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x – 5 = 0$.

Решение: Единственным корнем является $x = 1$. Других решений нет, поскольку функция монотонно возрастает.

Ответ: 1.

Задание 4

В конце первого круга футбольного чемпионата Австрии (то есть все команды сыграли каждая с каждой по одному разу) у всех команд одинаковое количество набранных очков. Каково наибольшее возможное значение этого количества, если за победу команда получает 3 очка, 1 за ничью и 0 за поражение? В чемпионате Австрии выступает 12 команд.

Решение: Всего сыграно 66 матчей. Максимальное возможное количество очков равно 198, соответственно, верно неравенство $12x \leq 198$, где x – число очков каждой команды. Наибольшее подходящее целочисленное значение x равно 16. Такая ситуация возможна, если каждая команда выиграла 5 игр, сыграла одну игру вничью и проиграла 5 игр.

Ответ: 16.

Задание 5

Группа туристов идет по прямой с постоянной скоростью мимо горы, регулярно измеряя расстояние до неё. Расстояния равнялись 5, 1 и 4 километров в 8, 10 и 11 часов соответственно. Каким было расстояние до горы в 9 часов? Чему оно будет равно в 12 часов?

Решение: Составим систему уравнений

$$\{d^2 + x^2 = 25,\ d^2 + (x - 2v)^2 = 1,\ d^2 + (x - 3v)^2 = 16.$$

Отсюда $d = 0$, $x = 5$, $v = 3$. Можно получить искомые расстояния – 2 километра в 9 часов и 7 километров в 12 часов.

Ответ: 2 км, 7 км.

Задание 6

Дана трапеция $ABCD$, BC и AD — её основания. Угол BAD равен 120°, а AC является его биссектрисой. Описанная около треугольника ABD окружность имеет диаметр, равный $4\sqrt{3}$. AC и BD пересекаются в точке O, и площади треугольников AOD и BOC относятся как 4:1. Найдите все стороны трапеции $ABCD$. Введите в качестве ответов квадраты их величин.

Решение: Поскольку AC – биссектриса угла BAD, углы BAC и CAD равны 60°. Из-за свойств трапеции то же значение и у угла ACB, соответственно, треугольник ABC – равносторонний. Обозначим длину его стороны за a.

Благодаря подобию треугольников AOD и BOC, можно найти, что $AD = 2a$.

Если D – диаметр окружности, описанной около ABD, то

$$BD = D\,sin\angle BAD = 6.$$

По теореме косинусов можем записать, что

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos\angle BAD,$$

откуда находим, что $a = \frac{6}{\sqrt{7}}$. Наконец, по теореме косинусов находим, что $CD = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Ответ: $AB = BC = \frac{6}{\sqrt{7}}$, $CD = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, $AD = \frac{12}{\sqrt{7}}$. Соответственно, $AB^2 = BC^2 = \frac{36}{7}$, $CD^2 = \frac{108}{7}$, $AD^2 = \frac{144}{7}$