

Câu 1 (2,0 điểm):

1. Tìm điều kiện của x để biểu thức $\sqrt{x-5}$ có nghĩa.

2. Tính $A = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$.

3. Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a+2}} + \frac{1}{\sqrt{a-2}} \right) : \frac{\sqrt{a}}{a-4}$, với $a > 0$ và $a \neq 4$.

Câu 2 (3,0 điểm):

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ (2,0)

2. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx - 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. ($m < 0$)

3. Xác định tọa độ giao điểm của parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 3x - 2$.
(1, 1) và (2, 4)

Câu 3 (1,0 điểm):

Người ta đổ thêm 20 gam nước vào một dung dịch chứa 4 gam muối thì nồng độ của dung dịch giảm đi 10%. Hỏi trước khi đổ thêm nước thì dung dịch chứa bao nhiêu gam nước?

Câu 4 (3,5 điểm):

1. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn tâm O . Hai đường cao BE , CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H .

a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn. (2 điểm)

b) Chứng minh rằng: $AF \cdot AB = AE \cdot AC$.

c) Kẻ đường kính AD của đường tròn tâm O . Chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.

2. Một chiếc máy bay bay lên từ mặt đất với vận tốc 600 km/h. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 30° . Hỏi sau 1,5 phút máy bay lên cao được bao nhiêu kilômét theo phương thẳng đứng?

Câu 5 (0,5 điểm):

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 2020$. Tìm giá trị nhỏ nhất

biểu thức: $Q = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}$.

Đáp án tham khảo:

Câu 1 (VD)

Cách giải:

1. Tìm điều kiện của x để biểu thức $\sqrt{x-5}$ có nghĩa.

Biểu thức $\sqrt{x-5}$ có nghĩa khi $x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$

Vậy với $x \geq 5$ thì biểu thức $\sqrt{x-5}$ có nghĩa.

2. Tính $A = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75} \\ &= \sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{9 \cdot 3} - \sqrt{25 \cdot 3} \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3}(2+3-5) \\ &= \sqrt{3} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Vậy $A = 0$.

3. Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}+2} + \frac{1}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}}{a-4}$ với $a > 0$ và $a \neq 4$

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}+2} + \frac{1}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}}{a-4} \\ &= \left[\frac{\sqrt{a}-2}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)} + \frac{\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)} \right] \cdot \frac{a-4}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{\sqrt{a}-2+\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)} \cdot \frac{a-4}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{2\sqrt{a}}{a-4} \cdot \frac{a-4}{\sqrt{a}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Vậy $P = 2$ với $a > 0$ và $a \neq 4$.

Câu 2 (VD)

Cách giải:

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=4 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2-y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 1)$

2. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx - 1$ nghịch biến trên R .

Hàm số $y = mx - 1$ nghịch biến trên R khi $m < 0$.

Vậy với $m < 0$ thì hàm số $y = mx - 1$ nghịch biến trên R .

3. Xác định tọa độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3x - 2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) , ta có:

$$x^2 = 3x - 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) - (x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases}$$

Với $x=2 \Rightarrow y=2^2=4$

Với $x=1 \Rightarrow y=1^2=1$

Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là $(1;1), (2;4)$.

Câu 3 (VD)

Cách giải:

Người ta đổ thêm 20 gam nước vào một dung dịch chứa 4 gam muối thì nồng độ của dung dịch giảm đi 10%. Hỏi trước khi đổ thêm nước thì dung dịch chứa bao nhiêu gam nước?

Gọi khối lượng nước trước khi đổ thêm là x (gam) ($x > 0$)

Nồng độ dung dịch ban đầu là $\frac{4}{x+4} \cdot 100\%$

Sau khi đổ thêm 20 gam nước thì nồng độ dung dịch là $\frac{4}{20+x+4} \cdot 100\% = \frac{4}{x+24} \cdot 100\%$

Vì nồng độ của dung dịch giảm đi 10% nên ta có phương trình:

$$\frac{4}{x+4} \cdot 100\% - \frac{4}{x+24} \cdot 100\% = 10\%$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x+4} - \frac{4}{x+24} = \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+96-4x-16}{(x+4)(x+24)} = \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{80}{x^2+28x+96} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow x^2+28x+96=800$$

$$\Leftrightarrow x^2+28x-704=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+44x-16x-704=0$$

$$\Leftrightarrow x(x+44)-16(x+44)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-16)(x+44)=0$$

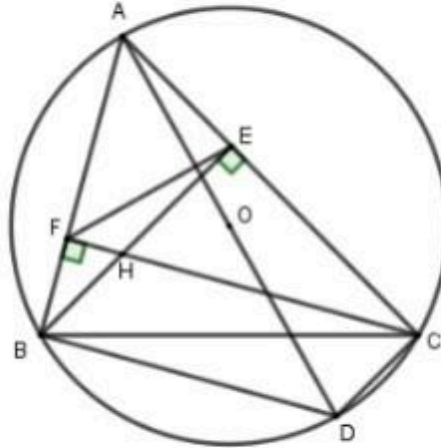
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=16(tm) \\ x=-44(ktm) \end{cases}$$

Vậy lượng nước ban đầu của dung dịch trước khi đổ thêm là 16 gam.

Câu 4 (VD)

Cách giải:

1. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn tâm O . Hai đường cao BE , CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H .



a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn.

Ta có:

BE là đường cao nên $BE \perp AC \Rightarrow \angle BEC = 90^\circ$

CF là đường cao nên $CF \perp AB \Rightarrow \angle BFC = 90^\circ$

Xét tứ giác $BFEC$ có:

$\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ nên $BFEC$ là tứ giác nội tiếp (hai đỉnh kề một cạnh cùng nhìn cạnh đối diện các góc bằng nhau)

Vậy tứ giác $BFEC$ nội tiếp (đpcm).

b) Chứng minh rằng: $AF \cdot AB = AE \cdot AC$

Theo câu a, $BFEC$ là tứ giác nội tiếp nên $\angle BFE + \angle BCE = 180^\circ$ (tính chất)

Mà $\angle BFE + \angle AFE = 180^\circ$ (kề bù)

Nên $\angle BCE = \angle BCA = \angle AFE$

Xét $\triangle AFE$ và $\triangle ACB$ có:

$\angle A$ chung

$\angle AFE = \angle ACB$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle AFE \sim \triangle ACB$ (g - g)

$\Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$ (cạnh tương ứng)

$\Rightarrow AF \cdot AB = AE \cdot AC$ (đpcm)

c) Kẻ đường kính AD của đường tròn tâm O . Chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.

AD là đường kính nên $\angle ACD = \angle ABD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow DC \perp AC, DB \perp AB$.

Ta có:

$$\begin{cases} DC \perp AC \\ BH \perp AB \end{cases} \Rightarrow DC \parallel BH \text{ (từ vuông góc đến song song)}$$

$$\begin{cases} DB \perp AB \\ CH \perp AC \end{cases} \Rightarrow DB \parallel CH \text{ (từ vuông góc đến song song)}$$

Tứ giác $BHCD$ có: $DC \parallel BH, DB \parallel HC$ nên là hình bình hành. (đpcm)

2. Một chiếc máy bay bay lên từ mặt đất với vận tốc 600 km/h . Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 30° . Hỏi sau 1,5 phút máy bay bay lên cao được bao nhiêu kilomet theo phương thẳng đứng?

$$\text{Đổi } 1,5 \text{ phút} = \frac{1,5}{60} = \frac{1}{40} \text{ giờ}$$

Sau $\frac{1}{40}$ giờ máy bay bay được số kilomet theo phương AB là:

$$600 \cdot \frac{1}{40} = 15 \text{ (km)}$$

Sau 1,5 phút máy bay bay được số kilomet theo phương thẳng đứng là:

$$15 \cdot \sin 30^\circ = 15 \cdot \frac{1}{2} = 7,5 \text{ (km)}.$$

Vậy sau 1,5 phút, máy bay lên cao được $7,5 \text{ km}$.

Câu 5 (VDC)

Cách giải:

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 2020$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{x} \\ b = \sqrt{y} \\ c = \sqrt{z} \end{cases} \Rightarrow a, b, c > 0$$

$$\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 2020 \Rightarrow ab + bc + ca = 2020$$

Ta có:

$$Q = \frac{a^4}{a^2 + b^2} + \frac{b^4}{b^2 + c^2} + \frac{c^4}{c^2 + a^2}$$

Áp dụng BĐT $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ ta được:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{a^4}{a^2+b^2} + \frac{b^4}{b^2+c^2} + \frac{c^4}{c^2+a^2} \\ &\geq \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2+b^2+b^2+c^2} + \frac{c^4}{c^2+a^2} \\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2} \\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \end{aligned}$$

Lại có:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$b^2 + c^2 \geq 2bc$$

$$c^2 + a^2 \geq 2ca$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = 2020$$

$$\Rightarrow Q \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \geq \frac{2020}{2} = 1010$$

$$\Rightarrow Q \geq 1010$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{\frac{2020}{3}} \Rightarrow x = y = z = \frac{2020}{3}$

Vậy GTNN của Q là 1010 khi $x = y = z = \frac{2020}{3}$