

XXXVI Olimpiada Matemática Thales (2021)

Provincial 1: Reparto en cajas.

En un supermercado hay 360 botes de miel y 300 botes de mermelada. Se van a meter en cajas.

Una vez finalizado han salido tres cajas más de botes de miel que de mermelada, y las cajas de miel contienen un bote menos que las de mermelada.

- a) ¿Cuántas cajas había de miel?
- b) ¿Cuántas cajas había de mermelada?
- c) ¿Cuántos botes hay en cada caja de miel?

Explica el procedimiento que has seguido para resolver las tres cuestiones anteriores.

Provincial 2: Fabricando mascarillas.

Una empresa de fabricación de mascarillas tiene en su plantilla dos turnos de empleados.

Cada día recibe un rollo de tela apta para la fabricación de mascarillas y un rollo de 1430 metros de cinta elástica para ceñir la mascarilla a la cara.

Explica el procedimiento que has seguido para resolver las tres cuestiones.

- a) El turno 1 es capaz de hacer el máximo número de mascarillas en 7 horas. El turno 2 es capaz de hacer ese mismo número de mascarillas en 10 horas. Sabe por experiencia que si pone a los dos turnos juntos a trabajar hacen 320 mascarillas menos por hora de lo que cabría esperar.

Como la empresa quiere terminar el trabajo en el menor tiempo posible puso los dos turnos juntos a trabajar y tardaron exactamente en hacer las mascarillas 6 horas. ¿Cuál es el máximo número de mascarillas que son capaces de fabricar al día la empresa con el material suministrado?

- b) Sabiendo que las mascarillas tienen una dimensión de 12 cm x 18,5 cm, el rollo tiene de ancho 1,5 metros y sobra al día 1,26 metros cuadrados, ¿cuántos metros tiene el rollo de tela de largo?
- c) Si las cintas elásticas deben tener una longitud de 17 cm, ¿cuántas cintas son capaces de fabricar de más al día?

Provincial 3: El equipamiento.

El director de la empresa “Todo para su hogar” contrató el pasado mes de febrero a Luis para que realizara los trabajos de limpieza de su empresa con motivo de la pandemia que estamos sufriendo y como pago obtendría todo el equipamiento que necesitara para su labor y además 1000 € al final de dicho mes.

Pasado 12 días y no estando del todo satisfecho con el trabajo que Luis venía realizando, ha procedido a despedirle, dándole como pago por el trabajo realizado en todos estos días 200 € y el equipamiento suministrado.

- a) ¿En cuántos euros estaba valorado este equipamiento?
- b) Si hubiese estado trabajando 20 días en la empresa, además del equipamiento. ¿Cuántos euros hubiese cobrado Luis en efectivo?
- c) Si Luis al ser despedido de la empresa “Todo para su hogar” hubiese recibido además del equipamiento, 300 € en efectivo. ¿Cuántos días estuvo trabajando en ella durante el mes de febrero?

Explica el procedimiento que has seguido en cada uno de los apartados.

Provincial 4: Las parcelas.

El periodo de confinamiento nos ha hecho valorar la importancia de tener la mayor extensión posible de jardín en nuestras viviendas. Si tenemos una parcela con forma de triángulo rectángulo isósceles que ocupa una extensión de 882 m^2 y queremos construir una casa de planta cuadrada tal y como nos indica la figura 1.



fig. 1

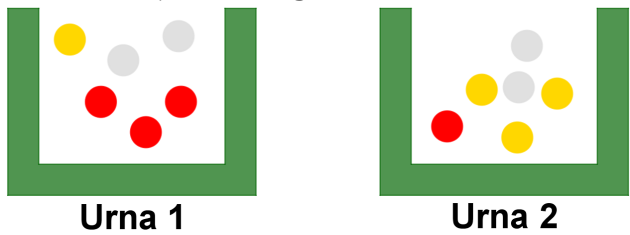
Explica el procedimiento que has seguido para resolver las siguientes cuestiones.

- a) ¿Qué superficie de jardín podemos tener?
- b) ¿Cuál sería el perímetro de la vivienda?
- c) ¿Qué superficie de jardín podemos tener?
- d) ¿Qué superficie ocupará la vivienda?

Provincial 5. Navidad en Chiclana de la Frontera.

En el mercadillo de navidad de Chiclana de la Frontera este año ha llegado un puesto en el que se propone un juego. El puesto dispone de dos urnas cerradas y en las que no se puede ver lo que hay dentro, y también se disponen de 12 bolas del mismo tamaño. Cuatro de ellas son doradas, otras cuatro son plateadas y las otras cuatro son rojas.

Lola, la señora que dirige el puesto, toma las bolas y las mete en las urnas de la siguiente manera: una bola dorada en la primera y las otras tres en la segunda urna, dos bolas plateadas en la primera urna y las otras dos en la segunda urna, y finalmente toma las bolas rojas y mete tres en la primera urna y la otra bola roja en la segunda.



Nos plantea el siguiente juego: “Vais a sacar una bola sin mirar de cada una de las urnas. Si son de distinto color, se reinsertan a las urnas correspondiente, y si son del mismo color se gana el juego”.

Primera cuestión: ¿a qué color jugaríais para tener más opciones de ganar?

Opción 1	Opción 2	Opción 3	Opción 4
Jugaría a dos bolas doradas	Jugaría a dos bolas plateadas	Da igual jugar a cualquier color ya que hay cuatro bolas de cada color	Jugaría a dos bolas rojas

Segunda cuestión: Si alguien apuesta por la primera opción, apostar por las bolas doradas, Lola le plantea la siguiente pregunta. Si quitamos una bola dorada de la segunda urna, ¿Seguirías apostando por las dos bolas doradas?

Opción 1	Opción 2	Opción 3	Opción 4
Si claro, seguiría jugando a dos bolas doradas	En este caso daría igual jugar a bolas doradas o plateadas	No, al haber menos bolas doradas, nunca apostaría por bolas dorada, apostaría por bolas plateadas	Entonces apostaría por bolas rojas que hay más en la primera urna

Tercera cuestión: Si alguien apuesta por la segunda opción, apostar por las bolas plateadas, Lola le vuelve a plantear una nueva cuestión. Si pasamos una bola plateada de la primera urna a la segunda, ¿seguirías apostando por las dos bolas plateadas?

Opción 1	Opción 2	Opción 3	Opción 4
En realidad dejaría de apostar a plateadas y apostaría por bolas doradas	Mantendría mi apuesta, seguiría jugando a bolas plateadas	No, pasaría a apostar por bolas o rojas o plateadas	Ahora me daría igual apostar a cualquier color, apostaría a cualquiera de ellos

Cuarta cuestión: Si alguien apuesta por la última opción, apostar por las bolas rojas, Lola que no se queda satisfecha con esa elección le dice: ¿Estás segura? Creo que si mueves una bola de lugar podrás tener más opciones para tu elección de bola roja. ¿Qué bola moverías y hacia dónde?

Opción 1	Opción 2	Opción 3	Opción 4
Movería una bola roja de la primera a la segunda urna	Lola no tiene razón. No movería nada, ya las bolas rojas tienen la máxima opción de ganar	Movería una bola plateada de la segunda a la primera urna	Movería una bola roja de la segunda a la primera urna

Regional 1: La barca.

Cuatro amigos se encuentran en la orilla Norte del río Guadalquivir y quieren cruzar a la orilla Sur. Para ello tienen una barca en la que Andrés, que es el más rápido, tarda un minuto en cruzar, Benito lo hace en dos minutos, Carlos necesita tres minutos y Dionisio cuatro minutos.

La barca solo soporta el peso de dos y cuando los lleva va a la velocidad del más lento.

¿Cómo han de realizar los viajes para cruzar los cuatro en el menor tiempo posible?

Cuando iban a emprender la travesía se presentan tres amigas de ellos, Elena que tarda en cruzar con la barca cinco minutos, Flor que emplea seis minutos y Gema, que es la más lenta, necesita siete minutos, y también desean atravesar el río para ir a la otra orilla del Guadalquivir.

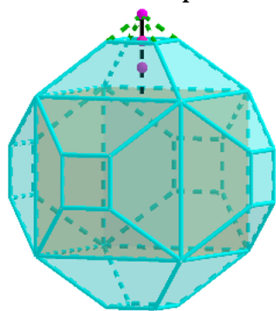
¿Ahora cómo deben organizarse para cruzar los siete en la barca empleando el menor tiempo posible?

Regional 2: Lámpara poliédrica.

Una empresa ha diseñado unas lámparas con forma poliédrica como la de la imagen. Se ha formado de la siguiente manera: Sobre cada una de las caras de un cubo se ha levantado una pirámide de altura igual a la distancia de cada cara al centro del cubo, y luego éstas se han truncado, formando troncos de pirámide de altura $\frac{2}{3}$ de la pirámide original.

Si el cubo tiene una capacidad de 54 litros, ¿cuál es la capacidad de la lámpara completa?

Razona la respuesta.



Nota: Puedes ver la construcción y la imagen en el siguiente enlace:

<https://www.geogebra.org/classic/qaaymm6h>

La figura podrás verla mejor pinchando en el icono marcado por la flecha para a continuación mover la zona gráfica teniendo pinchando el ratón.



Regional 3: Órbitas cíclicas.

Partiendo de un número entero entre 0 y 9, nos interesan las sucesivas transformaciones que sufre aplicando una función, y manteniendo solo el dígito de las unidades cada vez.

Por ejemplo, si consideramos la función $f(x) = 2x + 1$, y partiendo del entero 6, obtenemos sucesivamente:

$2 \times 6 + 1 = 13$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 3;

$2 \times 3 + 1 = 7$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 7;

$2 \times 7 + 1 = 15$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 5;

$2 \times 5 + 1 = 11$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 1;

$2 \times 1 + 1 = 3$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 3;

$2 \times 3 + 1 = 7$, y así sucesivamente.

.....

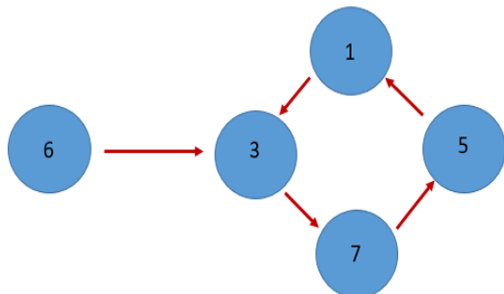
Podríamos continuar indefinidamente, pero vemos que el proceso ha cerrado el círculo.

Llamaremos órbita de un entero entre 0 y 9, bajo la acción de la función f , a la secuencia de enteros sucesivos obtenidos aplicando f y manteniendo sólo el dígito de las unidades. En el ejemplo anterior, la órbita de 6 es (6, 3, 7, 5, 1, 3, 7, 5, 1, 3,...) que se descompone en dos fases:

una primera secuencia transitoria (6, 3), y la otra secuencia que se repite indefinidamente (3, 7, 5, 1, ...).

Una secuencia como ésta la denominamos ciclo y al número de enteros que contiene (en este caso 4) se le denomina longitud del ciclo.

Como ayuda te presentamos el gráfico de la órbita del número 6 para la función $f(x) = 2x + 1$



Contesta razonadamente las siguientes cuestiones:

a) Para la función $f(x) = 4x + 1$:

a.1. Determina la órbita y la longitud del ciclo para el número 2, y represéntala con un diagrama como el que representa la órbita de 6.

a.2. Determina la órbita, la longitud de su ciclo y represéntala con diagrama para los números enteros 0, 3, 4, 6 y 8.

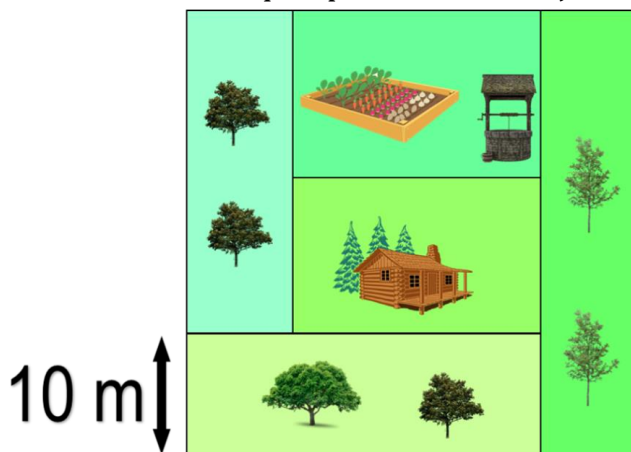
b) Explica brevemente por qué la órbita de un número entero siempre termina al recorrer un ciclo, independientemente de la función aplicada.

Regional 4: Repartiendo la herencia.

Un padre ha dado como herencia a sus cinco hijos e hijas una finca cuadrada como indica la figura.

Cada una de las cinco partes en las que se ha dividido tiene la misma área que las demás.

Usando la medida que aparece en el dibujo, halla la superficie de toda la finca. Razona tu respuesta.



Regional 5: La enredadera.

Este año 2021 para celebrar esta olimpiada tan atópica el 1 de enero hemos plantado la semilla de una enredadera de crecimiento secuencial en la fachada del edificio de mi casa que tiene 5 plantas de altitud y cada una tiene de altura 2,80 metros.

Sabemos que durante el primer año crece una rama perpendicular al suelo que alcanzará la longitud de 8 cm el 31 de diciembre.

Durante el segundo año, 2022, sabemos que le crecen dos ramas de 8 cm cada una, que forman entre sí 90° y un ángulo de 135° con la rama madre.

A lo largo del tercer año, 2023, a la rama de la derecha le crecen dos ramas de 8 cm cada una, que forman entre sí un ángulo de 90° y 135° con la rama madre. La rama de la izquierda se seca y cae.

Mientras que, en el cuarto año, 2024, el crecimiento es simétrico, crece según el patrón anterior la rama de la izquierda y se seca y cae la de la derecha.

Y, así sucesivamente siguiendo la secuencia de los dos últimos años.

Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Razona si la siguiente afirmación es cierta o falsa:

“En el año 2050 crecerá la rama de la derecha y se secará y caerá la rama de la izquierda”.

b) ¿Qué longitud de ramas tendrá la enredadera el 31 de diciembre del año 2050?

224 cm, 232 cm, 240 cm, 248 cm, 256 cm

c) ¿A qué altura llegará el año 2050?

d) ¿Cuál es la fórmula que nos da la altura de la enredadera en función de los años que lleva plantada?

e) ¿Qué año superará por primera vez la altura del edificio?