Sifat Invers pada Komposisi Fungsi

Pembahasan sifat invers pada komposisi fungsi mempelajari hubungan kesamaan suatu fungsi invers dengan kesamaan lainnya. Sifat invers pada komposisi fungsi dapat membuat sobat idschool lebih tepat dalam menentukan langkah yang tepat untuk menyelesaikan variasi soal yang diberikan terkait komposisi fungsi.

Sifat fungsi invers pada komposisi fungsi dapat dilihat pada gambar di bawah.

Sifat Invers pada Komposisi Fungsi

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \left(g^{-1} \circ f^{-1}\right)(x)$$

$$\left\{(f \circ g) \circ g^{-1}\right\}(x) = \left\{g^{-1} \circ (g \circ f)\right\}(x) = f(x)$$

$$\left\{f^{-1} \circ (f \circ g)\right\}(x) = \left\{(g \circ f) \circ f^{-1}\right\}(x) = g(x)$$

$$(f \circ g \circ h)^{-1}(x) = \left(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}\right)(x)$$

Cara Cepat Mencari Invers Fungsi

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

CONTOH SOAL:

Contoh 27

Diketahui f: $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{R}$ dan g: $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{R}$ ditentukan oleh $f(x) = x - 5$ dan $g(x) = 2x + 6$. Tentukan rumus fungsi:

a. $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$

b. $(g \circ f)^{-1}(x)$ dan $(f \circ g)^{-1}(x)$

c. $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$

d. $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ dan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

Jawab:

a.
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x-5) \\ &= 2(x-5)+6 \\ &= 2x-4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x+6) \\ &= 2x+6-5 \\ &= 2x+1\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= y \\ 2x-4 &= y \\ x &= \tfrac{1}{2}(y+4) \\ (g \circ f)^{-1}(x) &= \tfrac{1}{2}(x+4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= y \\ 2x+1 &= y \\ x &= \tfrac{1}{2}(y-1) \\ (f \circ g)^{-1}(x) &= \tfrac{1}{2}(x-1)\end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned}f(x) &= y \\ x-5 &= y \\ x &= y+5 \\ f^{-1}(x) &= x+5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(x) &= y \\ 2x+6 &= y \\ x &= \tfrac{1}{2}(y-6) \\ g^{-1}(x) &= \tfrac{1}{2}(x-6)\end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned}(g^{-1} \circ f^{-1})(x) &= g^{-1}(f^{-1}(x)) \\ &= g^{-1}(x+5) \\ &= \tfrac{1}{2}(x+5-6) \\ &= \tfrac{1}{2}(x-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= f^{-1}(g^{-1}(x)) \\ &= f^{-1}(\tfrac{1}{2}(x-6)) \\ &= \tfrac{1}{2}(x-6)+5 \\ &= \tfrac{1}{2}(x+4)\end{aligned}$$

Berdasarkan contoh, terlihat bahwa $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ dan $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.