

Поняття складеної функції та її похідної.

Розглянемо приклад.

Приклад 1. Нехай треба обчислити по заданому значенню x значення функції y , яка задана формулою $y = \sqrt{9 - x^2}$

Для цього спочатку треба обчислити за заданим значенням x значення

$u = g(x) = 9 - x^2$, а потім за значенням u обчислити $y = f(u) = \sqrt{u}$.

Отже, функція g ставить у відповідність числу x число u , а функція f — числу u число y . Говорять, що y є складеною функцією із функцій g і f , і пишуть $y = f(g(x))$.

Функцію $g(x)$ називають внутрішньою функцією, або проміжною змінною, функцію $f(u)$ — зовнішньою функцією. Отже, щоб обчислити значення складеної функції $y = f(g(x))$ в довільній точці x , спочатку обчислюють значення й внутрішньої функції g , а потім $f(u)$.

Приклад 2. Розглянемо функцію $y = \sqrt{\cos x}$. Вона є складеною із функцій $u = \cos x$,

$y = \sqrt{u}$, де $\cos x$ — внутрішня функція, $\sqrt{u}$ — зовнішня функція.

Приклад 3. Запишіть складені функції $f(g(x))$ і $g(f(x))$, якщо $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$.

Розв'язання

$$f(g(x)) = \sin g(x) = \sin x^2$$

$$g(f(x)) = (f(x))^2 = \sin^2 x$$

Виконання вправ

1. Задайте формулами елементарні функції f і g , із яких побудована складена функція $y = f(g(x))$:

а) $y = \cos(2x + 3)$; б) $y = (2x + 3)^7$;

в) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$; г) $y = \sin^2 x$.

Відповіді:

$$\text{а) } u = g(x) = 2x + 3; \quad y = f(u) = \cos u;$$

$$\text{б) } u = g(x) = 2x + 3; \quad y = f(u) = u^7;$$

$$\text{в) } u = g(x) = x^2 + 2x; \quad y = f(u) = \sqrt{u};$$

$$\text{г) } u = g(x) = \sin x; \quad y = f(u) = u^2.$$

2. Дано функції: $f(x) = \sin x$; $g(x) = \sqrt{x}$; $h(x) = x^5 + 1$. Побудуйте функції:

$$\text{а) } y = f(g(x));$$

$$\text{б) } y = f(h(x));$$

$$\text{в) } y = g(f(x));$$

$$\text{г) } y = g(h(x));$$

$$\text{д) } y = h(f(x));$$

$$\text{е) } y = h(g(x)).$$

$$\text{Відповіді: а) } y = \sin g(x) = \sin \sqrt{x}; \quad \text{б) } y = \sin h(x) = \sin(x^5 + 1);$$

$$\text{в) } y = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sin x};$$

$$\text{г) } y = \sqrt{h(x)} = \sqrt{x^5 + 1};$$

$$\text{д) } y = f^5(x) + 1 = \sin^5 x + 1;$$

$$\text{е) } y = g^5(x) + 1 = (\sqrt{x})^5 + 1 = x^2 \sqrt{x} + 1.$$

У складеній функції $y = f(g(x))$ присутня проміжна змінна $u = g(x)$. Тому при знаходженні похідної складеної функції ми будемо вказувати, по якій змінній взято похідну, використовуючи при цьому спеціальні позначення:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- похідна функції y по аргументу x ;

$$y'_u = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

- похідна функції y по аргументу u ;

$$u'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

- похідна функції u по аргументу x .

Теорема. Похідна складеної функції $y = f(g(x))$ знаходиться за формулою

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x, \text{ де } u = g(x),$$

або похідна складеної функції дорівнює похідній зовнішньої функції по проміжній змінній, помноженій на похідну внутрішньої функції по основному аргументу.

Доведення

Будемо вважати, що функція $u = g(x)$ має похідну в точці x_0 , а функція $y = f(u)$ має похідну в точці $u_0 = g(x_0)$, тобто існують

границі $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ і $\Delta u = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) \neq 0$.

Нехай аргументу x_0 надано приросту Δx , тоді змінна y набуде приросту $\Delta y \neq 0$. Оскільки $g(x)$ одержала приріст Δx , то функція y також одержить приріст $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$. Приріст Δx зумовив виникнення приросту Δu і Δy .

Подамо $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$.

Перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$ (при цьому $\Delta u \rightarrow 0$).

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

або $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $y = (3x^3 - 1)^5$.

Розв'язання

$y = (3x^3 - 1)^5$ — складена функція $y = u^5$, де $u = 3x^3 - 1$, тоді

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x, \quad y' = (u^5)' \cdot (3x^3 - 1)' = 5u^4 \cdot 9x = 5(3x^3 - 1)^4 \cdot 9x =$$

$$= 45x(3x^3 - 1)^4.$$

При обчисленні похідної складеної функції явне введення допоміжної букви y для позначення проміжного аргументу не є обов'язковим. Тому похідну даної функції знаходять відразу як добуток похідної степеневі функції u^5 на похідну від функції $3x^3 - 1$:

$$y' = ((3x^3 - 1)^5)' = 5(3x^3 - 1)^4 \cdot (3x^3 - 1)' = 5 \cdot (3x^3 - 1)^4 \cdot 9x =$$

$$= 45x(3x^3 - 1)^4.$$

