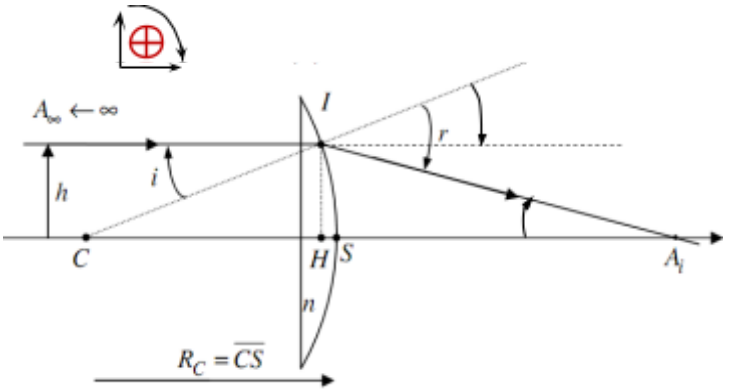
OPTIQUE : L'ŒIL ET SES DEFAUTS

PARTIE I : ETUDE SIMPLIFIEE DE L'ŒIL HUMAIN

I.A. Modèle simplifié de l'œil pour la vision de loin



I.1. Loi de Snell-Descartes : $\sin r = n \sin i$.

I.2. $\overline{CH} = R_C \cos i$. $\overline{HA_i} = \dfrac{R_C \sin i}{\tan(r-i)}$.

I.3. $\overline{CA_i} = \overline{CH} + \overline{HA_i} = R_C \left[\cos i + \dfrac{\sin i}{\tan(r-i)} \right]$.

I.4. Rayons para axiaux

I.4.a. Pour de faibles incidences : $\sin i \approx i$, $\sin r \approx r$, $r \approx ni$, $\cos i \approx 1$ et $\tan(r-i) \approx r-i \approx (n-1)i$. D'où la position de A_i : $\overline{CA_i} \approx R_C \left[1 + \dfrac{1}{(n-1)} \right] = \dfrac{nR_C}{(n-1)}$: indépendante de *i*.

I.4.b. $f_i = \overline{SF_i} \approx \overline{HF_i} \approx \dfrac{R_C i}{(r-i)}$. Soit : $f_i \approx \dfrac{R_C}{(n-1)}$.

I.4.c. AN : $f_i \# 16,7mm$; $R_C \# 5,5mm$.

I.5. Pupille grande ouverte :

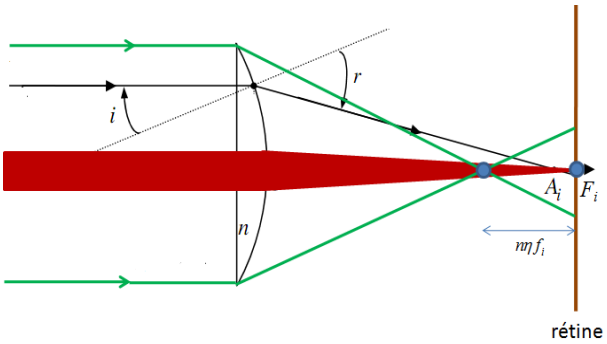
I.5.a . $\overline{CA_i} = R_C \left[\cos i + \dfrac{\sin i}{\tan(r-i)} \right] = \dfrac{R_C \left(\cos i \sin(r-i) + \sin i \cos(r-i) \right)}{sin(r-i)} = \dfrac{R_C \sin r}{sin(r-i)}$, relation que l'on peut trouver on utilisant l'invariant du triangle (*C,I,A*$_i$) : $\dfrac{R_C}{\sin(r-i)} = \dfrac{\overline{CA_i}}{\sin(\pi - r)} = \dfrac{\overline{CA_i}}{\sin r} \Rightarrow \overline{CA_i} = \dfrac{R_C \sin r}{sin(r-i)}$.

D'où : $\overline{CA_i} = \dfrac{R_C \sin r}{sin(r-i)} = \dfrac{nR_C \sin i}{\sin r \cos i - \sin i \cos r} = \dfrac{nR_C \sin i}{n \sin i \cos i - \sin i \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}}$. Soit : $\overline{CA_i} = \dfrac{nR_C}{n \cos i - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}}$.

I.5.b. $i \approx \dfrac{h}{R_C}$, $\overline{CA_i} \approx \dfrac{nR_C}{n\left(1 - \dfrac{h^2}{2R_C^2}\right) - \left(1 - \dfrac{n^2}{2}\dfrac{h^2}{R_C^2}\right)} = \dfrac{nR_C}{(n-1)\left(1 + \dfrac{nh^2}{2R_C^2}\right)} \approx \dfrac{nR_C}{(n-1)}\left(1 - \dfrac{nh^2}{2R_C^2}\right)$.

I.5.c. $\overline{CA_i}(h \to 0) = \dfrac{nR_C}{(n-1)}$, donc :

$$\eta = \left| \frac{\overline{CA_i}(h) - \overline{CA_i}(h \to 0)}{\overline{CA_i}(h \to 0)} \right| = \frac{nh^2}{2R_C^2}$$.



1.5.d. $h \ll \dfrac{R_C}{2}$, l'approximation $h \ll R_C$ n'est pas valable.

$\sin i = \dfrac{h}{R_C} \approx \dfrac{1}{2}$, $\cos i \approx \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{CA_i} \approx \dfrac{nR_C}{n\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{1 - \dfrac{n^2}{4}}} = \dfrac{nR_C}{\alpha}$.

Donc : $\eta = \left| \dfrac{n-1}{\alpha} - 1 \right|$. AN : $\alpha \# 0,40$; $\eta \# 0,18$: les rayons marginaux convergent à 0,18nf_i = *4 ,1mm* avant la rétine.

I.5.e. La pupille est grande ouverte quand l'éclairement est faible. Les rayons issus d'un objet lointain ne convergent pas au même foyer. La lentille n'est plus stigmatique : La vision de loin est affectée d'aberrations géométriques donc moins nette.

Pour voir plu net au loin, il faut éliminer au mieux les rayons marginaux, par fermeture de la pupille. C'est pourquoi on a le reflex de plisser les yeux.

I.B. Modèle simplifié de l'œil pour la vision de près

1.6. œil normal

I.6.a. $\dfrac{1}{p_i} - \dfrac{1}{p_o} = \dfrac{1}{f_i} = V$: relation de conjugaison. $[V] = L^{-1}$: homogène à l'inverse d'une longueur. V s'exprime en dioptrie (δ).

I.6.b. *V* diminue avec la distance $|p_o|$. $V_{max} = \dfrac{1}{SR} + \dfrac{1}{d_{\min}}$. AN : $V_{max} \# 64\delta$.

I.6.c. $V_{\min} = \dfrac{1}{SR} + \dfrac{1}{d_{\max \to \infty}} = \dfrac{1}{SR}$. AN : $V_{\min} \# 60\delta$.

I.6.d. $A = V_{\max} - V_{\min} = \dfrac{1}{d_{\min}} = 4\delta$.

I.7. œil presbyte

I.7.a. $A' = \dfrac{1}{d'_{\min}}$. AN : $A' \# 2,86\delta$.

I.7.b. A la limite de résolution $RB_i = SR \tan \varepsilon \ll \varepsilon SR \Rightarrow A_o B_{o\min} = \dfrac{RB_i}{|G_t|} \ll \varepsilon SR \dfrac{d'_{\min}}{SR} = \varepsilon d'_{\min}$. AN : $A_o B_{o\min} \# 0,14mm$

distance inférieure à l'espacement entre caractères. L'individu peut encore distinguer à l'œil nu les caractères et la ponctuation du texte.

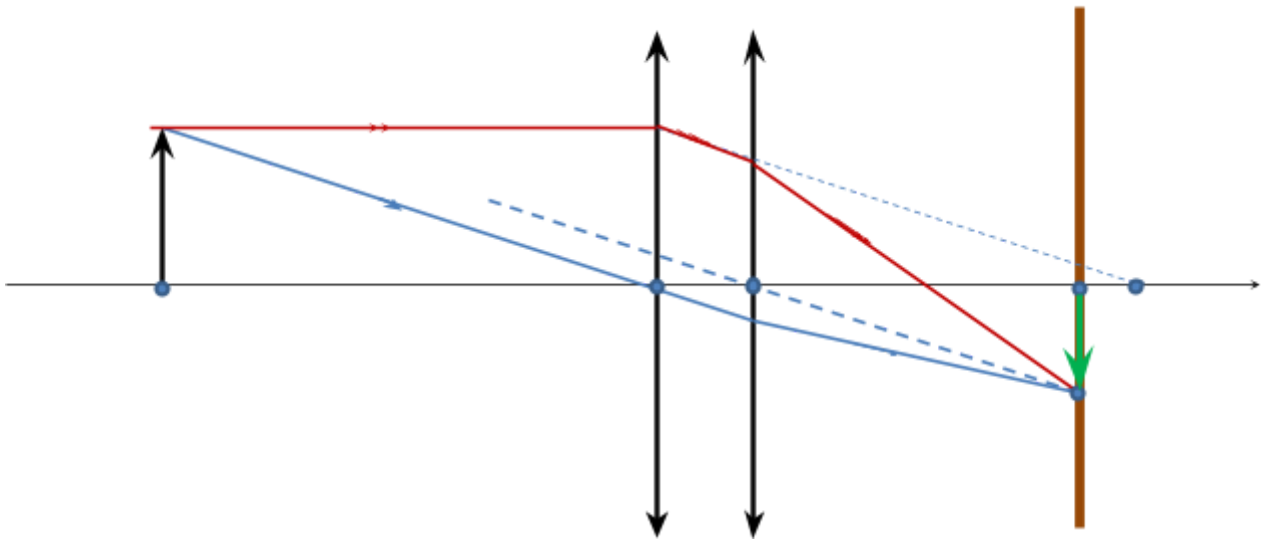
I.7.c. Pour $d'_{\min} = 1m$, $A_o B'_{o\min} \# 3,5mm$:distance de l'ordre de la taille des caractères d'un texte de journal. L'individu presbyte ne peut plus distinguer les caractères et ne peux plus lire son journal sans porter de lunettes correctrices.

I.8. correction de la presbytie

I.8.a . $A_0 \xleftarrow{(L_L)} A_1 \xleftarrow{(L)} R$; $\frac{1}{\overline{SR}} - \frac{1}{\overline{SA_1}} = V_{\min} = \frac{1}{\overline{SR}} \Rightarrow \overline{SA_1} \to -\infty$.

D'où : $V_L = \frac{1}{\overline{S_L A_1}} + \frac{1}{d_{\min}} = \frac{1}{\left(\overline{S_L S} + \overline{SA_1}\right)_{\to -\infty}} + \frac{1}{d_{\min}} = \frac{1}{d_{\min}}$. AN : $V_L \# 4\delta$.

I.8.b. construction géométrique

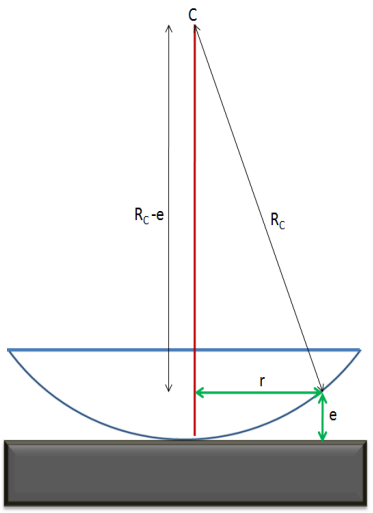


I.8.c. Au maximum d'accommodation, $V'_{\max} = \frac{1}{SR} + \frac{1}{d'_{\min}}$. L'objet nettement observé est alors à $d''_{\min} = SA_{o\min}$ avant L_L telle que $V'_{\max} = \frac{1}{SR} + \frac{1}{d'_{\min}} = \frac{1}{SA'_1} + \frac{1}{SR}$ Soit : $SA'_1 = d'_{\min} = 1m$ et $V_L = \frac{1}{\overline{S_L A'_1}} + \frac{1}{d''_{\min}} = \frac{1}{d'_{\min}} + \frac{1}{d''_{\min}} = \frac{1}{d_{\min}}$.

Soit : $d''_{\min} = \frac{d'_{\min} d_{\min}}{d'_{\min} - d_{\min}}$. AN : $d''_{\min} \# 33,3cm > 25cm$.

I.8.d. L'image que donne l'un des verres des lunettes d'un objet lointain est dans son plan focal image situé derrière la rétine loin de la zone de vision distincte de l'œil nu. Ces lunettes ne permettent pas la vision de loin.
Pour passer facilement de la vision de près à la vision de loin, le presbyte doit porter un verre progressif.

PARTIE II : MESURE DU RAYON DE COURBURE D'UNE LENTILLE



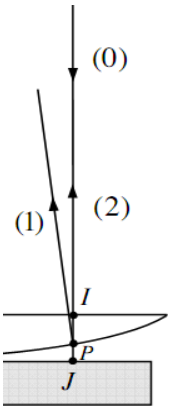
II.1.a. $R_C^2 = (R_C - e)^2 + r^2 \Rightarrow e^2 - 2R_C e + r^2 = 0$. D'où : $e = R_C - \sqrt{R_C^2 - r^2}$

II.1.b . Pour $R_C \gg r$, $e = R_C\left(1 - \sqrt{1 - r^2/R_C^2}\right) \approx \frac{r^2}{2R_C}$. $\alpha = \frac{1}{2}$.

II.1.c. Pour $R_C \gg r$, les rayons (1) et (2) sont quasi-parallèles. Ainsi :

$$\Delta L = L_2 - L_1 \approx 2e = \frac{r^2}{R_C}$$.

II.1.d. On a $\underline{A}_2(P) = \underline{A}_0(P)\underline{r}_{a/a}$ et $\underline{A}_1(P) = \underline{A}_0(P)\underline{t}^2\underline{r}_{a/v}e^{-j2\pi\Delta L/\lambda_0}$.



Les réflexions étant de natures différentes, les coefficients de réflexion correspondants sont alors de signes opposés ($\underline{r}_{a/a} \times \underline{r}_{a/v} < 0$). Ainsi : $\frac{\underline{A}_1(P)}{\underline{A}_2(P)} = \underline{t}^2\left|\frac{\underline{r}_{a/v}}{\underline{r}_{a/a}}\right|e^{-j\pi} \times e^{-j2\pi\Delta L/\lambda_0}$.

Soit : $\Delta\Phi = \frac{2\pi\Delta L}{\lambda_0} + \pi = \frac{2\pi r^2}{\lambda_0 R_C} + \pi$.

II.1.e. A une constante multiplicative près,

$I = \underline{A}(P) \times \underline{A}^*(P) = \left(\underline{A}_1(P) + \underline{A}_2(P)\right) \times \left(\underline{A}_1^*(P) + \underline{A}_2^*(P)\right) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\Phi$. Avec :

$I_1 = I_2 = I_0/2$.

Soit : $I = I_0\left[1 + \cos\left(\Delta\Phi\right)\right] = I_0\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi r^2}{\lambda_0 R_C}\right)\right]$.

$I = cste \Rightarrow r = cst$: les franges sont donc des anneaux centrés sur l'axe (OS_L) .

II.1.f . Les minimas d'intensité, ou franges sombres, correspondent à $I = 0 \Rightarrow \frac{r_{Sm}^2}{\lambda_0 R_C} = m$ entier ($m \in \mathbb{N}^*$). Soit : $r_{Sm} = \sqrt{\lambda_0 R_C}\sqrt{m}$. Varie en $\sqrt{m}$ moins vite m que : les anneaux se resserrent en s'éloignant du centre.

II.2. a. $S_L \xleftrightarrow{L_P} O_E \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_P O_E}} - \frac{1}{\overline{O_P S_L}} = \frac{1}{f_{pi}}$. Soit : $\overline{O_P O_E} = \frac{f_{pi} \times \overline{O_P S_L}}{\left(f_{pi} + \overline{O_P S_L}\right)}$. AN : $\overline{O_P O_E} = \frac{-15 \times 10}{(10 - 15)} = 30cm$.

II.2.b. $G_{tp} = \frac{\overline{O_P O_E}}{\overline{O_P S_L}}$; AN : $G_{tp} = -2$.

II.2.c . $R_C = \frac{r_{Sm}^2}{\lambda_0 m} = \frac{R_{Sm}^2}{G_{tp}^2 \lambda_0 m}$; AN : $R_C = \frac{r_{S5}^2}{5 \times 4 \times \lambda_0} \# 9{,}16m$.

II.3. L'intensité résultante de la superposition des deux ondes incohérentes est : $I = I_1 + I_2$.

$$I = I_0\left[1+\cos\left(\Delta\Phi_1\right)\right]+I_0\left[1+\cos\left(\Delta\Phi_2\right)\right]=I_0\left[2-\cos\left(\frac{2\pi r^2}{\lambda_1 R_C}\right)-\cos\left(\frac{2\pi r^2}{\lambda_2 R_C}\right)\right].$$

Soit : $$I(r)=2I_0\left[1-\cos\left(\frac{2\pi r^2\left(\lambda_2-\lambda_1\right)}{\lambda_2\lambda_1 R_C}\right)\cos\left(\frac{2\pi r^2\left(\lambda_2+\lambda_1\right)}{\lambda_2\lambda_1 R_C}\right)\right]=2I_0\left[1+\gamma(r)\cos\left(2\pi\, p(r)\right)\right]$$.

$$\gamma(r)=\cos\left(\frac{\pi r^2\left(\lambda_2-\lambda_1\right)}{\lambda_2\lambda_1 R_C}\right)=$$ et $$p(r)=\frac{r^2\left(\lambda_2+\lambda_1\right)}{2\lambda_2\lambda_1 R_C}+\frac{1}{2}=\frac{r^2}{\lambda_{moy}R_C}+\frac{1}{2}$$.

On a coïncidence entre les minimas des deux systèmes pour : $\frac{r_{mn}^2}{\lambda_1 R_C}=m$ et $\frac{r_{mn}^2}{\lambda_2 R_C}=n$, avec m,n entiers.

$\frac{m}{n}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{589593}{588995}$. (nombres premiers entre eux). Donc, l'ordre minimal donnant une coïncidence est

$p=\frac{1}{2}\left(589593+588995\right)+\frac{1}{2}$ 1 (p $\frac{r_{\max}^2}{\lambda_{moy}R_C}$) : (inaccessible avec une précision à 6 chiffres significatifs !).

ELECTROMAGNETISM : PROPAGATION EN ELECTROMAGNETISME

PARTIE III : REFLEXION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE

III.1.Onde incidente

III.1.a . Une onde progressive est le phénomène de propagation d'une vibration ou d'une perturbation.

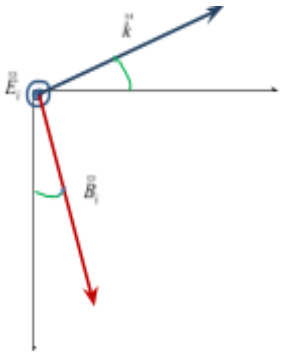
III .1.b. $$\vec{k}=k\left(-\sin i\vec{e}_y+\cos i\vec{e}_z\right)=\frac{\omega}{c}\left(-\sin i\vec{e}_y+\cos i\vec{e}_z\right)$$

III.1.c. $$\underline{\vec{E}}_i(M,t)=E_0\exp\left[-j\left(\omega t-\vec{k}\,\overrightarrow{OM}\right)\right]\vec{e}_x=E_0\exp\left[-j\left(\omega t+k\sin i\, y-k\cos i\, z\right)\right]\vec{e}_x$$

III.1.d. d'après l'équation de Maxwell-Faraday $$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{E}}_i(M,t)=-\frac{\partial\underline{\vec{B}}_i(M,t)}{\partial t}=j\omega\underline{\vec{B}}_i(M,t)$$.

Or : $\vec{\nabla}\times\underline{\vec{E}}_i=\vec{\nabla}\varphi\times E_0\exp\left[-j\left(\omega t-\varphi\right)\right]\vec{e}_x=j\vec{k}\times\underline{\vec{E}}_i$. D'où la relation de structure : $\underline{\vec{B}}_i(M,t)=\frac{\vec{k}}{\omega}\times\underline{\vec{E}}_i(M,t)$.

III.1.e. $$\underline{\vec{B}}_i(M,t)=\frac{E_0}{c}\left(\cos i\vec{e}_y+\sin i\vec{e}_z\right)\exp\left[-j\left(\omega t+k\sin i\, y-k\cos i\, z\right)\right]\vec{e}_x$$.



$\underline{\vec{B}}_i$ est polarisé dans la direction parallèle au vecteur unitaire $\vec{u}_B=\cos i\vec{e}_y+\sin i\vec{e}_z$.

III.1.f. $$\vec{R}=\vec{E}\times\frac{\vec{B}}{\mu_0}=\vec{E}\times\left(\frac{\vec{k}}{\mu_0\omega}\times\vec{E}\right)=\frac{\vec{E}^2}{\mu_0\omega}\vec{k}$$.

$$\vec{R} = \frac{E_0^2}{\mu_0 \omega} \cos^2(\omega t + k \sin i \; y - k \cos i \; z) \vec{k}$$

Soit : : Orienté dans la direction de propagation de l'onde incidente.

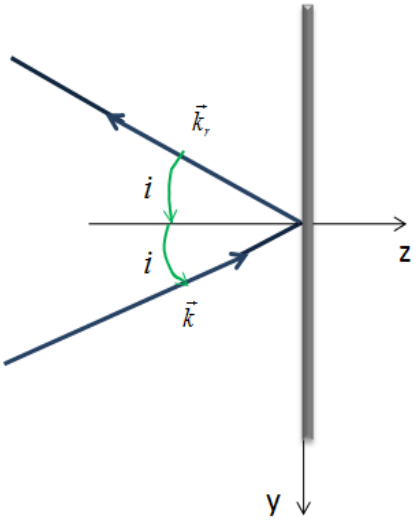
$$\left\langle \vec{R} \right\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega} \vec{k} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \left(-\sin i \vec{e}_y + \cos i \vec{e}_z \right)$$

.

III.2. Onde réfléchie

III.2.a. Lois de Descartes : (1) Le rayon réfléchie est dans le plan d'incidence.

(2) L'angle de réflexion est égal, en valeur absolue, à l'angle d'incidence.



$$\vec{k}_r = -k \left(\sin i \vec{e}_y + \cos i \vec{e}_z \right) = -\frac{\omega}{c} \left(\sin i \vec{e}_y + \cos i \vec{e}_z \right)$$

.

III.2.b.

$$\underline{\vec{E}}_r(M,t) = E_{0r} \exp\left[-j \left(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{OM} \right) \right] \vec{e}_x = E_{0r} \exp\left[-j \left(\omega t + k \sin i \; y + k \cos i \; z \right) \right] \vec{e}_x$$

.

III.2.c. $$\underline{\vec{B}}_r = \frac{\vec{k}_r}{\omega} \times \underline{\vec{E}}_r = \frac{E_{0r}}{c} \left(-\cos i \vec{e}_y + \sin i \vec{e}_z \right) \exp\left[-j \left(\omega t + k \sin i \; y + k \cos i \; z \right) \right]$$

.

III.2.d. A l'interface des deux milieux, les relations de passage s'écrivent :

$$\vec{E}_2(M,t) - \vec{E}_1(M,t) = \frac{\sigma(M,t)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1\to 2}(1)$$ et $$\vec{B}_2(M,t) - \vec{B}_1(M,t) = \mu_0 \vec{j}_s(M,t) \times \vec{n}_{1\to 2}(2)$$.

Dans un conducteur parfait (milieu 2), $\vec{E}_2(M,t) = \vec{0}$ et $\vec{B}_2(M,t) = \vec{0}$.

$$(1) \Rightarrow \vec{0} - \left(E_0 \vec{e}_x + E_{0r} \vec{e}_x \right) = \frac{\sigma(0,0,0,0)}{\varepsilon_0} \vec{e}_z \Rightarrow E_{0r} = -E_0$$.

III.2.e. $$\vec{R}_r = \frac{E_{0r}^2}{\mu_0 \omega} \cos^2(\omega t + ky \sin i + kz \cos i) \vec{k}_r = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + ky \sin i + kz \cos i) \left(\sin i \vec{e}_y + \cos i \vec{e}_z \right)$$ orienté dans la direction de l'onde réfléchie.

$$\left\langle \vec{R}_r \right\rangle = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \left(\sin i \vec{e}_y + \cos i \vec{e}_z \right)$$.

III.3. Onde résultante

III.3.a. $$\underline{\vec{E}}_t = \underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_r = E_0 \, \mathrm{e}^{-j(\omega t + k \sin i \; y - k \cos i \; z)} \vec{e}_x - E_0 \, \mathrm{e}^{-j(\omega t + k \sin i \; y + k \cos i \; z)} \vec{e}_x = 2jE_0 \sin\left(k \cos i \; z \right) \mathrm{e}^{-j(\omega t + k \sin i \; y)} \vec{e}_x$$

En notation réelle : $$\vec{E}_t = 2E_0 \sin\left(k \cos i \; z \right) \sin\left(\omega t + k \sin i \; y \right) \vec{e}_x$$

$$\underline{\vec{B}}_t = \underline{\vec{B}}_i + \underline{\vec{B}}_r = \frac{E_0}{c} \mathrm{e}^{-j(\omega t + k \sin i \; y)} \left[\left(\cos i \vec{e}_y + \sin i \vec{e}_z \right) \mathrm{e}^{j(k \cos i \; z)} - \left(-\cos i \vec{e}_y + \sin i \vec{e}_z \right) \mathrm{e}^{-j(k \cos i \; z)} \right]$$

$$\underline{\vec{B}}_t = \frac{2E_0}{c} \mathrm{e}^{-j(\omega t + k \sin i \; y)} \left[j \sin\left(k \cos i \; z \right) \sin i \vec{e}_z + \cos\left(k \cos i \; z \right) \cos i \vec{e}_y \right]$$

En notation réelle :

$$\vec{B}_t = \frac{2E_0}{c}\left[\sin(i)\sin\left(k\cos i\, z\right)\sin\left(\omega t + k\sin i\, y\right)\vec{e}_z + \cos(i)\cos\left(k\cos i\, z\right)\cos\left(\omega t + k\sin i\, y\right)\vec{e}_y\right]$$

.

III.3.b.

$$\vec{R}_t = 2E_0\sin\left(k\cos i\, z\right)\sin\left(\Phi\right)\vec{e}_x \times \frac{2E_0}{\mu_0 c}\left[\sin(i)\sin\left(k\cos i\, z\right)\sin\left(\Phi\right)\vec{e}_z + \cos(i)\cos\left(k\cos i\, z\right)\cos\left(\Phi\right)\vec{e}_y\right]$$

$$\vec{R}_t = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c}\left[-2\sin(i)\sin^2\left(k\cos i\, z\right)\sin^2\left(\Phi\right)\vec{e}_y + \cos(i)\cos\left(2k\cos i\, z\right)\cos\left(2\Phi\right)\vec{e}_z\right]$$

; avec

$\Phi(M,t) = \omega t + k\sin i\, y$.

$$\left\langle \vec{R}_t \right\rangle = -\frac{2E_0^2}{\mu_0 c}\sin(i)\sin^2\left(k\cos i\, z\right)\vec{e}_y = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\sin(i)\left(1-\cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda/2\cos i}\right)\right)\vec{e}_y$$

.

- L'onde résultante se propage dans la direction Oy dans le sens des y décroissants à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k\sin i} = \frac{c}{\sin i}$.
- Il y'a interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie. Les surfaces d'égale intensité sont des plans parallèles à (xoy). L'interfrange dans un plan normal à la direction de propagation oy est $I = \frac{\lambda}{2\cos i}$.

PARTIE IV : COURANT DANS UN CONDUCTEUR EN REGIME VARIABLE

VI.1. MG : $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$; MF : $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$;MΦ : $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$; MA : $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

VI.2. $\vec{J}_D = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. En régime sinusoïdal : $\frac{|\underline{J}_D|}{|\underline{J}_C|} = \frac{\varepsilon_0\omega|\underline{E}|}{\gamma|\underline{E}|} = \frac{\varepsilon_0\omega}{\gamma}$.

Ordre de grandeur : pour le cuivre à 100MHz, $\frac{|\underline{J}_D|}{|\underline{J}_C|} = \frac{4\pi\varepsilon_0\nu}{2\gamma} \approx 10^{-10} \ll 1$.

VI.3. $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{E} = -\vec{\nabla}^2\vec{E} = -\gamma\vec{\nabla}^2\vec{J} = -\frac{\partial\vec{\nabla}\times\vec{B}}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}$ .D'où : $\vec{\nabla}^2\vec{J} - \frac{\mu_0}{\gamma}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} = \vec{0}$; $\alpha = \frac{\mu_0}{\gamma}$.

VI.4.

IV.4.a. $\frac{\partial^2\vec{J}(z,t)}{\partial z^2} - \frac{\mu_0}{\gamma}\frac{\partial\vec{J}(z,t)}{\partial t} = \vec{0}$ (3).

IV.4.b. $\underline{\vec{J}} = \vec{J}_0 e^{(-z/\delta)}e^{j(z/\delta-\omega t)}$. $\frac{\partial^2\underline{\vec{J}}}{\partial z^2} - \mu_0\gamma\frac{\partial\underline{\vec{J}}}{\partial t} = \left(j\gamma\mu_0\omega - \frac{(1+j)^2}{\delta^2}\right)\underline{\vec{J}} = \vec{0}$. L'expression vérifie l'équation (3) à condition que : $j\gamma\mu_0\omega - (1+j)^2/\delta^2 = \gamma\mu_0\omega - 2/\delta^2 = 0$.

IV.4.c. $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$.

IV.4.d. AN : $\delta \# 9,4\mu m$ .Valeur trop faible. A très hautes fréquences, le courant est pratiquement surfacique.

IV.5. $\vec{J} = J_0 e^{(-z/\delta)} \cos\left(z/\delta - \omega t\right) \vec{e}_y$. $\vec{E} = \frac{J_0}{\gamma} e^{(-z/\delta)} \cos\left(z/\delta - \omega t\right) \vec{e}_y$. La puissance volumique instantanée dissipée par effet Joule et $P(t) = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{J_0^2}{\gamma} e^{(-2z/\delta)} \cos^2\left(z/\delta - \omega t\right) \vec{e}_y$.

Sur une période : $\langle P \rangle = \iiint_{conducteur} \frac{J_0^2}{2\gamma} e^{(-2z/\delta)} d\tau = \frac{J_0^2 S}{2\gamma} \int_0^\infty e^{(-2z/\delta)} dz$. $\langle P \rangle = \frac{J_0^2 S \delta}{4\gamma}$

PARTIE V : SUPRACONDUCTIVITE – EFFET MEISNER

V.1.a. Le courant volumique $\vec{J} = -ne\vec{v} = \sigma \vec{E}$ est fini (la densité et la vitesse des charges sont finies).Or $\sigma \to \infty$ donc $\vec{E} = \vec{0}$ à l'intérieur du supraconducteur .

V.1.b. $\delta = \left(\frac{m_e}{ne^2 \mu_0}\right)^{1/2}$ .AN : Pour le plomb , $\delta \# 0,53\mu m$ .trop faible.

V.2 . MG : $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$; MF : $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$; MΦ : $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$; MA : $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$.

$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{B} = -\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J} = -\frac{\mu_0 ne^2}{m_e} \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\mu_0 ne^2}{m_e} \vec{B}$. $\vec{B}$ est donc solution de l'équation : $\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \lambda^2 \vec{B} = \vec{0}$ .Où : $\lambda = \sqrt{\frac{\mu_0 ne^2}{m_e}} = \frac{1}{\delta}$.

V.3. a. $\frac{d^2 B(z)}{dz^2} - \lambda^2 B(z) = 0 \Rightarrow B(z) = \eta e^{-\lambda z} + \eta' e^{\lambda z}$. $B(\infty) = 0 \Rightarrow \eta' = 0, B(0) = B_0 = \eta$. Donc : $B(z) = B_0 e^{-\lambda z}$.

V.3.b. L'effet Meissner consiste en l'expulsion du champ magnétique du volume du supraconducteur.
Dans un champ magnétique extérieur, les lignes de champ magnétique ne pénètrent pas dans la pièce supraconductrice. Fait prouvé expérimentalement par le phénomène de lévitation observé à la transition de phase conducteur – supraconducteur.

V.4. $\vec{B}(0^+) - \vec{B}(0^-) = -B_0 \vec{e}_y = \mu_0 \vec{J}_S \times \vec{e}_z \Rightarrow \vec{J}_S = \frac{1}{\mu_0} \vec{e}_z \times \left(\vec{J}_S \times \vec{e}_z\right) = -\frac{1}{\mu_0} \vec{e}_z \times B_0 \vec{e}_y$. Soit : $\vec{J}_S = \frac{B_0}{\mu_0} \vec{e}_x$.

V .5. La force magnétique subie par l'élément de courant $\vec{J}_S(M) ds(M)$ en un point M de l'interface est $d\vec{F}_m = \vec{J}_S ds \times \left[\vec{B}(M) - \vec{B}_{ds}(M)\right]$. $\vec{B}(M) = B_0 \vec{e}_y$: champ magnétique total résultant au voisinage de M.

$\vec{B}_{ds}(M) = \frac{\mu_0 J_S}{2}\vec{e}_y$: champ créé par l'élément de courant $\vec{J}_S(M)ds(M)$ au voisinage de M (champ d'une nappe de courant infinie).

Ainsi : $d\vec{F}_m = J_S ds\vec{e}_x \times \frac{B_0}{2}\vec{e}_y = \frac{B_0^2}{2\mu_0}ds\vec{e}_z$. Par unité de surface : $\vec{f}_{mS} = \frac{d\vec{F}_m}{ds} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}\vec{e}_z = p_m\vec{e}_z$: normale à la surface du supraconducteur.

La pression correspondante est $p_m = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$.