PAU – MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC SS II – CASTILLA Y LEÓN – JUNIO 2023
EXAMEN ORDINARIO RESUELTO **Profesor: Rafael Núñez Nogales**

UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN	Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**	**EXAMEN** **Nº páginas: 2** (tabla adicional)

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.
CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)
Compramos tres entradas para tres actividades: una para el teatro, otra para un partido de baloncesto y otra para un concierto. Tras descontarnos el 10% del precio total, hemos pagado 117 euros por todas las entradas. Sabiendo que el precio de la entrada al concierto es el doble que el precio de la entrada al teatro y que la entrada al concierto es 20 euros más cara que la entrada del partido de baloncesto, determinar el precio de la entrada a cada actividad.

Resolución

Sean x, y, z el precio de la entrada de teatro, baloncesto y concierto, respectivamente. Según el enunciado,

$\{0,9(x+y+z)=117\ z=2x\ z=y+20$ Sustituyendo $z = 2x$
, $\{x+y+2x=130\ 2x=y+20 \Rightarrow \{3x+y=130\ 2x-y=20$

Sumando las ecuaciones, $5x = 150$, $x = 30$; $y = 2x – 20 = 2.30 – 20 = 40$; $z = 2x = 2.30 = 60$

Por tanto, la entrada de teatro vale 30 €, la de baloncesto 40 € y la del concierto 60 €

P2. (Números y álgebra)
Se consideran las matrices $A=(2\ a\ 0\ -1\ 1\ a)$, $B=(1\ b\ 4\ 2\ 1\ 3)$ y $C=(-2\ 2\ 2\ -3)$
a) Hallar los valores de a y b para que se cumpla la igualdad AB = C.

Resolución

$AB=C \Rightarrow (2\ a\ 0\ -1\ 1\ a)(1\ b\ 4\ 2\ 1\ 3)=(-2\ 2\ 2\ -3) \Rightarrow (4a+2\ 2a+2b\ a+3\ 3a-b+2)=(-2\ 2\ 2$

Igualando, los elementos,
$\{4a+2=-2\ 2a+2b=2\ a+3=2\ 3a-b+2=-3 \Rightarrow \{a=-1\ a+b=1\ a=-1\ 3a-b=-5$
. Como $a = -1$, $\{-1+b=1 \rightarrow b=2\ 3(-1)-b=-5 \rightarrow b=2$

Por tanto, debe ser $a = -1$, $b = 2$

b) Para a = 2 y b = 4, resolver la ecuación matricial X = AB + 3C.

Resolución

Para $a = 2$, $b = 4$, $A=(2\ 2\ 0\ -1\ 1\ 2)$, $B=(1\ 4\ 4\ 2\ 1\ 3)$, $C=(-2\ 2\ 2\ -3)$. La solución de la ecuación sería

$X = AB + 3C = (2\ 2\ 0\ \ -1\ 1\ 2)(1\ 4\ 4\ 2\ 1\ 3) + 3(-\ 2\ 2\ 2\ \ -\ 3) = (10\ 12\ 5\ 4) + 3(-\ 2\ 2\ 2\ \ -\ 3) = (4\ 18$

P3. (Análisis)
Tras una etapa de seis horas, un ciclista publica los datos sobre la potencia desarrollada en función del tiempo. Para la segunda parte de la etapa, dicha potencia (en vatios) viene dada por la función $f(t) = -32t^2 + 352t - 568$ para $3 \leq t \leq 6$, donde t es el tiempo (en horas).
a) ¿Qué potencia alcanzó en el momento de iniciar la segunda parte de la etapa? ¿En qué intervalo de esa segunda parte alcanzó una potencia inferior a 272 vatios?

Resolución

En primer lugar se pide $f(3) = -32.3^2 + 352.3 - 568 = 200$ vatios.

Para la segunda pregunta, averiguamos primero para qué valores de t, con $3 \leq t \leq 6$, es $f(t) = 272$.
$-32t^2 + 352t - 568 = 272 \Rightarrow 32t^2 - 352t + 840 = 0$; dividimos entre 8 y queda $4t^2 - 44t + 105 = 0$

Resolviendo, $t = \frac{44 \pm 16}{8}$, $t = 3,5$; $t = 7,5$. Al ser la gráfica de f(t) una parábola cóncava que toma el valor 272 para $t = 3,5$ y $t = 7,5$, entonces la potencia es inferior a 272 vatios para $3 < t < 3,5$ y para $7,5 < t < 6$

b) ¿Al cabo de cuántas horas alcanzó la máxima potencia? Calcular esa potencia máxima.

Resolución

$f'(t) = -64t + 352 = 0 \Leftrightarrow t = 5,5$ y al ser la gráfica de f(t) una parábola cóncava el máximo absoluto es $t = 5,5$ horas, $f(5,5) = -32.5,5^2 + 352.5,5 - 568 = 400$. La potencia máxima es 400 vatios, a las 5,5 horas.

P4. (Análisis)
Consideremos la función $f(x) = \{\ x^2,\ si\ x\leq 1\ \frac{1}{2x-1},\ si\ x > 1$
a) Estudiar la continuidad f(x) en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.

Resolución

Para $x \neq 1$, f es continua por ser el resultado de operar con funciones continuas.

$f(x) = f(1) = 1^2 = 1 = f(x) = \frac{1}{2.1-1} = 1$. Luego, f es continua en $x = 1$

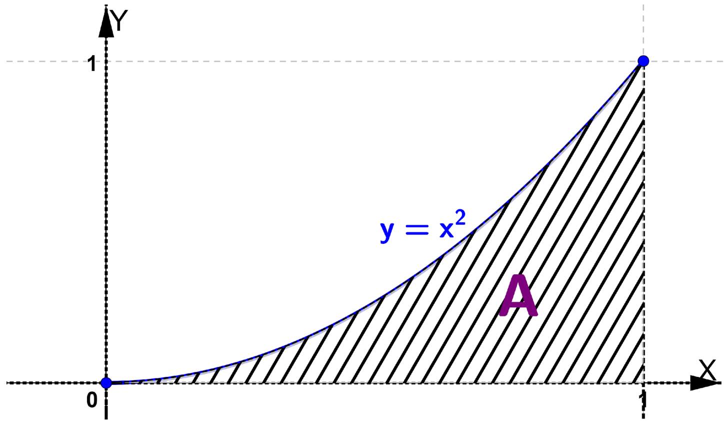
Conclusión: f es continua en R.

b) Determinar el área encerrada entre f(x) y el eje OX en el intervalo [0, 1], dibujando el recinto correspondiente.

Resolución

En el intervalo [0, 1] la gráfica de f es un trozo de parábola ($y = x^2$). Como $f(0) = 0^2 = 0$ y $f(1) = 1^2 = 1$, el trozo empieza en (0, 0) y termina en (1, 1).

El recinto cuya área se pide es



El área que se pide es $A = \int_1^1 x^2\, dx$. Una primitiva de x^2 es $p(x) = \frac{x^3}{3}$.

Por la regla de Barrow, $A = p(1) - p(0) = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} \cong 0,33\ u^2$

P5. (Estadística y Probabilidad)
El precio del litro de gasolina en una provincia sigue una distribución normal con media desconocida μ y desviación típica 0,05 euros. Un día cualquiera se toma una muestra de 10 estaciones de servicio, elegidas al azar en dicha provincia, registrando los siguientes precios del litro de gasolina (en euros):

1,612 ; 1,739 ; 1,625 ; 1,771 ; 1,642 ; 1,713 ; 1,705 ; 1,654 ; 1,632 ; 1,647

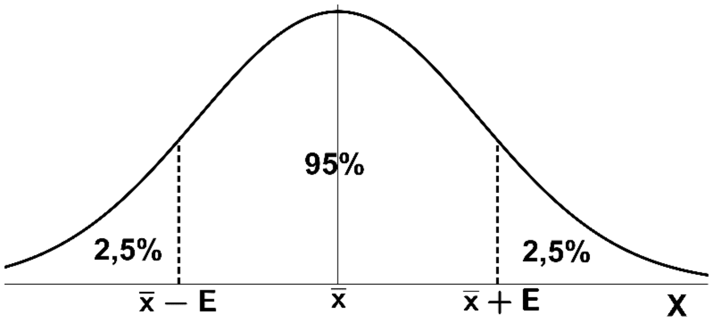
a) Con esta muestra, determinar un intervalo de confianza, al nivel del 95%, para la media poblacional μ (en euros) del precio del litro de gasolina en esa provincia.

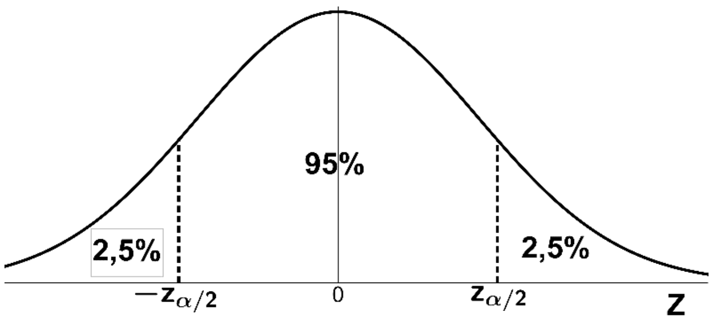
Resolución

X = precio $\rightarrow N(\mu, 0,05)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del 95% para estimar el precio medio, μ, es $I_c = (\overline{x} - E, \overline{x} + E)$,

siendo $\overline{x} = \frac{1,612 + 1,739 + 1,625 + 1,771 + 1,642 + 1,713 + 1,705 + 1,654 + 1,632 + 1,647}{10} = \frac{16,74}{10} = 1,674$ la media de la muestra de tamaño n = 10 y $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

Como el área bajo la campana es 100%, entonces 100% – 95% = 5% y 5% : 2 = 2,5%





$z_{\alpha/2}$ es el valor de la N(0, 1) que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = 95\% + 2,5\% = 97,5\% = 0,975$

Esta probabilidad coincide con $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,95}{2} = 0,975$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,975$ *usando la tabla de la N(0, 1)* $\rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$.

Luego, $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{0,05}{\sqrt{10}} \cong 0,031$;
$I_c = (1,674 - 0,031 ; 1,674 + 0,031) = (1,643 ; 1,705)$

b) Para un nivel de confianza del 99%, ¿cuál es el tamaño mínimo de muestra que hay que tomar en esa provincia para que el error cometido al estimar la media poblacional μ (en euros) sea inferior a 2 céntimos de euro?

Resolución

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación ; $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,99}{2} = 0,995$; σ = 0,05 ; 2 céntimos = 0,02

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,995$ *usando la tabla de la N(0, 1)* $\rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$.

Piden hallar n tal que
$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0,02 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{0,02} \leq \sqrt{n}$ *elevando al cuadrado* $\rightarrow (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{\sigma^2}{0,02^2} < n$

Sustituyendo: $n > 2,575^2 \cdot \frac{0,05^2}{0,02^2} \cong 41,4$. Luego, el tamaño mínimo de la muestra debe ser 42 estaciones.

P6. (Estadística y Probabilidad)
En el pasado mundial de fútbol, el 78% de los penaltis fueron lanzados por un jugador diestro mientras que el resto de penaltis fueron lanzados por un jugador zurdo. Además, se marcó gol en el 82% de los penaltis lanzados por jugadores diestros y en el 88% de los penaltis lanzados por jugadores zurdos. Si se elige al azar un jugador para lanzar un penalti:
a) ¿Qué probabilidad hay de que marque gol?
b) Si al lanzar el penalti no se marcó gol, ¿cuál es la probabilidad de que el jugador que lanzó el penalti sea zurdo?

Resolución

Sean los sucesos A = el penalti es lanzado por un jugador diestro
A^c = el penalti es lanzado por un jugador zurdo B = se marca gol

Según el enunciado, p(A) = 0,78 (luego, $p(A^c) = 1 - p(A) = 1 - 0,78 = 0,22$)
p(B/A) = 0,82 $p(B/A^c) = 0,88$

a) Se pide p(B). Por el teorema de probabilidad total,

$p(B) = p(A)\ p(B/A) + p(A^c)\ p(B/A^c) = 0{,}78 \cdot 0{,}82 + 0{,}22 \cdot 0{,}88 = 0{,}8332 = 83{,}32\%$

b) Se pide $p\left(\frac{A^c}{B^c}\right) = \frac{p(A^c \cap B^c)}{p(B^c)}$. Por una de las leyes de Morgan, $p\left(A^c \cap B^c\right) = p(A \cup B)^c$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A)p(B/A) = 0,78 + 0,8332 - 0,78 \cdot 0,82 = 0,973$

Luego, $p\left(\frac{A^c}{B^c}\right) = \frac{p(A^c \cap B^c)}{p(B^c)} = \frac{p(A \cup B)^c}{p(B^c)} = \frac{1 - p(A \cup B)}{1 - p(B)} = \frac{1 - 0{,}9736}{1 - 0{,}8332} \cong 0,1583 = 15,83\%$

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

C1. (Números y álgebra)
Dado el sistema $\{\ x + y + z = 0\ x - y - z = 0\ 3x - 3y - 3z = 0$ justifica que es un sistema compatible e indeterminado.

Resolución

La matriz del sistema es
$A^* = (1\ 1\ 1\ 0\ 1\ -1\ -1\ 0\ 3\ -3\ -3\ 0)\ \ -f3\ f3 = 3f2\ \ (1\ 1\ 1\ 0\ \ -1\ 1\ 1\ 0\ ).$

Como $|1\ 1\ \ -1\ 1| = 2 \neq 0$, rg A* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

C2. (Análisis)

¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$? Justifica la respuesta.

Resolución

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Luego, la curva $y = x^2 - 1$ es una parábola convexa que corta al eje X en –1 y 1.

Por tanto, $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ó $x \geq 1$.

Y como no se pueden calcular raíces cuadradas de números negativos, entonces
Dom(f) = $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

C3. (Estadística y Probabilidad)
¿Qué probabilidad hay de que coincida algún día de cumpleaños en un grupo de tres amigas que no son hermanas? Considerar años no bisiestos para el cálculo.

Resolución

La probabilidad de que no coincidan ninguno de los tres cumpleaños es $p = \frac{365}{365}\frac{364}{365}\frac{363}{365} \cong 0,9918$
pues no coinciden ninguno de los tres cumpleaños si la primera amiga cumple años cualquier día, la segunda uno de los 364 días restantes y la tercera uno de los 363 días restantes. Por tanto, la probabilidad que se pide es 1 – 0,9918 = 0,0082 = 0,82%