

### 1. מסלול קצר ביותר עם אילוצים:

סטודנט רוצה להגיע למבחן באלגוריתמים באוניברסיטה בדרך המהירה ביותר. מכוניתו של הסטודנט מבזבזת הרבה דלק ולכן הוא לא יכול לנסוע יותר מ- $x$  ק"מ רצוף ללא עצירה בתחנת דלק. נניח שתחנות דלק נמצאות רק בחלק מהערים. עזרו לסטודנט למצוא את הדרך הקצרה ביותר לאוניברסיטה בהתחשב באילוצי הדלק של מכוניתו.

באופן פורמלי יותר: נתון גרף  $G = \{V, E\}$  כאשר כל קודקוד  $v$  הוא עיר והקשתות בה הם הכבישים בין הערים כך שלכל קשת יש משקל של אורך הכביש  $w((u, v)) = x$ . בנוסף נתונה קבוצה  $S \subseteq V$  של קודקודים (ערים בהם יש תחנת דלק), ונתון  $k$  (מספר הק"מ שניתן לעבור ללא תחנת דלק).

צ"ל: ערך של המסלול קצר ביותר בין קודקוד מקור  $s$  לבין קודקוד יעד  $t$ , כך שבין כל זוג קודקודים במסלול הנמצאים ב- $S$  אין יותר מ- $k$  ק"מ.

$$\delta(s, t) : \forall v, u \in S \mid \delta(v, u) \leq k$$

### פתרון:

נתון שטנק הדלק של המכונית הוא  $k$  ונניח שהמסלול הקצר ביותר בין  $s$  ל- $t$  הוא כמובן הרבה יותר גדול מ- $k$  (אחרת התשובה היא טריוויאלית ע"י הרצת דייקסטרה), כך שאנחנו חייבים לעבור בתחנות דלק בדרך.

נבצע ג'ונסון בשלב הראשון בכדי לקבל מרחקים בין כל 2 קודקודים בגרף. לאחר מכן נבנה גרף  $G'$  שיכיל רק את תחנות הדלק (הנמצאות בקבוצה  $S$ ) ונוסיף את קודקוד  $s, t$ , כלומר את הערים שיש בהם תחנת דלק וקודקוד המקור והיעד. בין כל שני קודקודים ב- $G'$  נעביר קשת כך שעלות הקשת שנעביר תהיה המרחק ביניהן בגרף המקורי  $G$  לפי מה שאנחנו רואים במטריצת המרחקים שג'ונסון נתן לנו (ניתן להשמיט קשתות שמרחקן גדול מ- $k$ ).

כעת, נריץ דייקסטרה מ- $s$  ל- $t$  בגרף  $G'$  וככה נקבל את העלות של המסלול הקצר ביותר בין  $s$  ל- $t$  בהתחשב באילוצי התדלוק.

### פסודו-קוד:

$FindPath(G, S, k, s, t)$ :

1. הרץ אלגוריתם ג'ונסון על גרף  $G$  ושומר את התוצאות במטריצה  $B$ .

2. בנה את גרף  $G'$  באופן הבא:

$$a. V_{G'} = S \cup \{s, t\}$$

$$b. E_{G'} = \left\{ (u, v) \in B : u, v \in S \wedge \delta(v, w) \leq k \right\} \cup \left\{ (s, v) \in B : v \in S \right\} \cup \left\{ (v, t) \in B : v \in S \right\}$$

3. החזר התוצאה מהרצת דייקסטרה על גרף  $G'$  מקודקוד  $s$  לקודקוד  $t$ .

### סיבכויות זמן ריצה:

הרצת אלגוריתם ג'ונסון:  $O(|V|^2 \log(|V|) + |V||E|)$

יצירת גרף  $G'$ :  $O(|V|^2)$

הרצת דייקסטרה:  $O(|E| + |V| \log \log(|V|))$

**סה"כ:**  $O(|V||E| + |V|^2 \log(|V|))$

