

1.- Sea f la función definida para $x \neq 3$ por $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$. Dibuja la gráfica de f a partir del cálculo de los siguientes elementos: Los puntos de corte con los ejes coordenados, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos locales.

Resolución

Al ser $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$, $x = 2$, $x = -1$ y $f(0) = 0^2 - 0 - 2 = -2$,

la gráfica solo corta a los ejes en $(2, 0)$, $(-1, 0)$ y $(0, -2)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} = \frac{3^2 - 3 - 2}{3 - 3} = \frac{4}{0} = \pm \infty \Rightarrow \text{la asíntota vertical es A.V. : } x = 3$$

$$\text{Además, } f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x = \pm \infty. \text{ Luego, } f \text{ NO tiene asíntota horizontal en } \pm \infty.$$

Veamos si tiene asíntota oblicua, AO: $y = mx + n$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2 - x - 2}{x - 3}}{x} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$[f(x) - mx] = \left(\frac{x^2 - x - 2}{x - 3} - x \right) = \frac{2x - 2}{x - 3} = \frac{2}{1} = 2$$

Luego, la asíntota oblicua en $\pm \infty$ es la recta de ecuación AO: $y = x + 2$

$$y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} - (x + 2) = \frac{x^2 - x - 2 - (x^2 - x - 6)}{x - 3} = \frac{4}{x + 2}$$

Si $x \rightarrow +\infty$, $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} > 0$. Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en $+\infty$

Si $x \rightarrow -\infty$, $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} < 0$. Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en $-\infty$

$$f'(x) = \frac{(2x - 1)(x - 3) - (x^2 - x - 2) \cdot 1}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2}, \quad x = 5, \quad x = 1$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

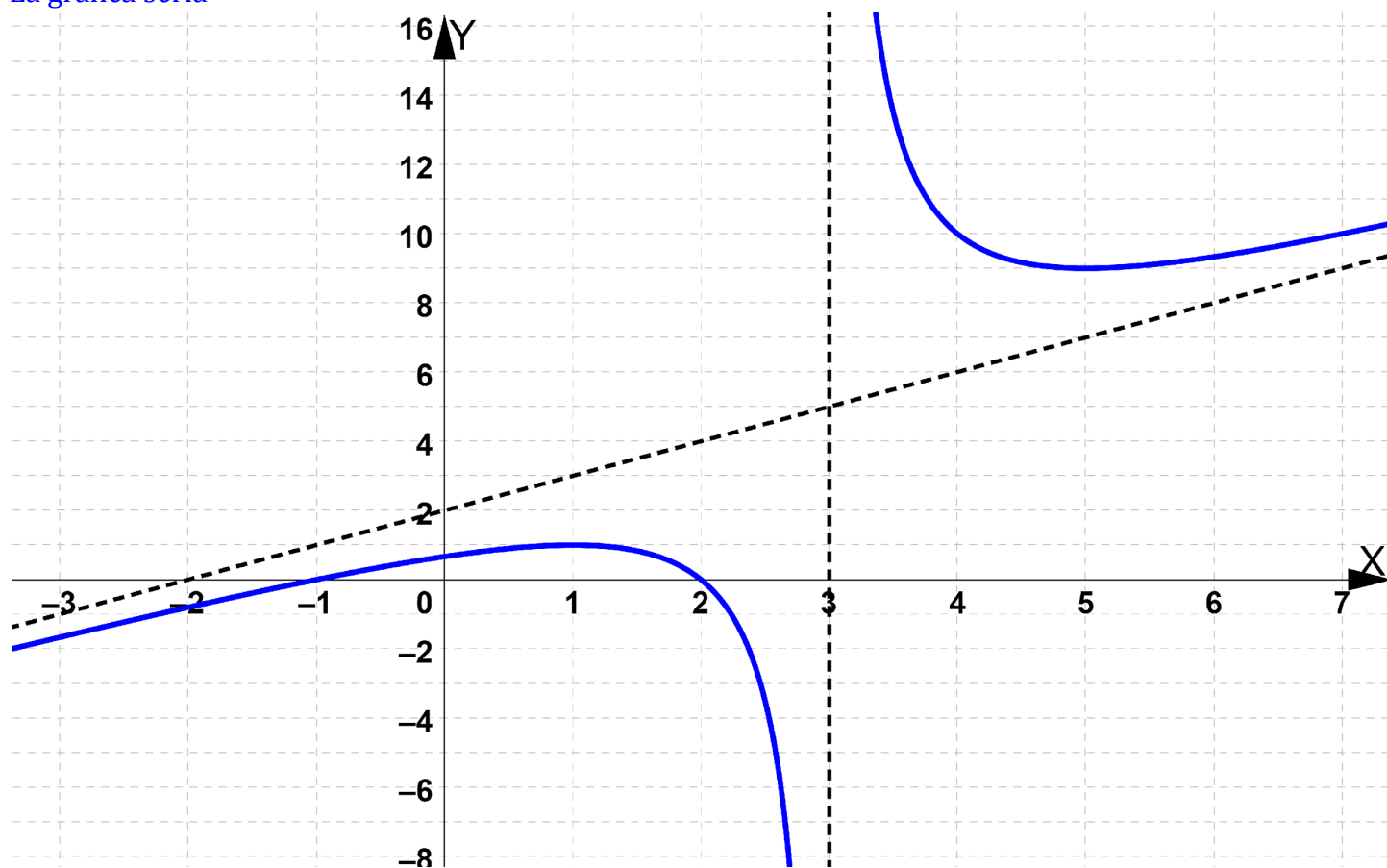
	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, 5)$	5	$(5, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	-		+
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente		decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 5) - \{3\}$

El máximo relativo es: $x = 1, y = f(1) = \frac{1^2 - 1 - 2}{1 - 3} = 1$. Punto $(1, 1)$.

El mínimo relativo es: $x = 5, y = f(5) = \frac{5^2 - 5 - 2}{5 - 3} = 9$. Punto (5, 9).

La gráfica sería



2.- Sean f y g las funciones reales definidas para $x > 0$ por, respectivamente, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$

(a) Dibuja la región limitada por las gráficas de ambas funciones y la recta de ecuación $x = \frac{1}{2}$.

(b) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

Resolución

Puntos de corte entre las gráficas: $\{y = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ y } y = \frac{1}{x} \}$;

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = x(x - 1) = 0$$

Y como $x > 0$, entonces $x = 1, y = \frac{1}{1} = 1$. Las gráficas se cortan en (1, 1)

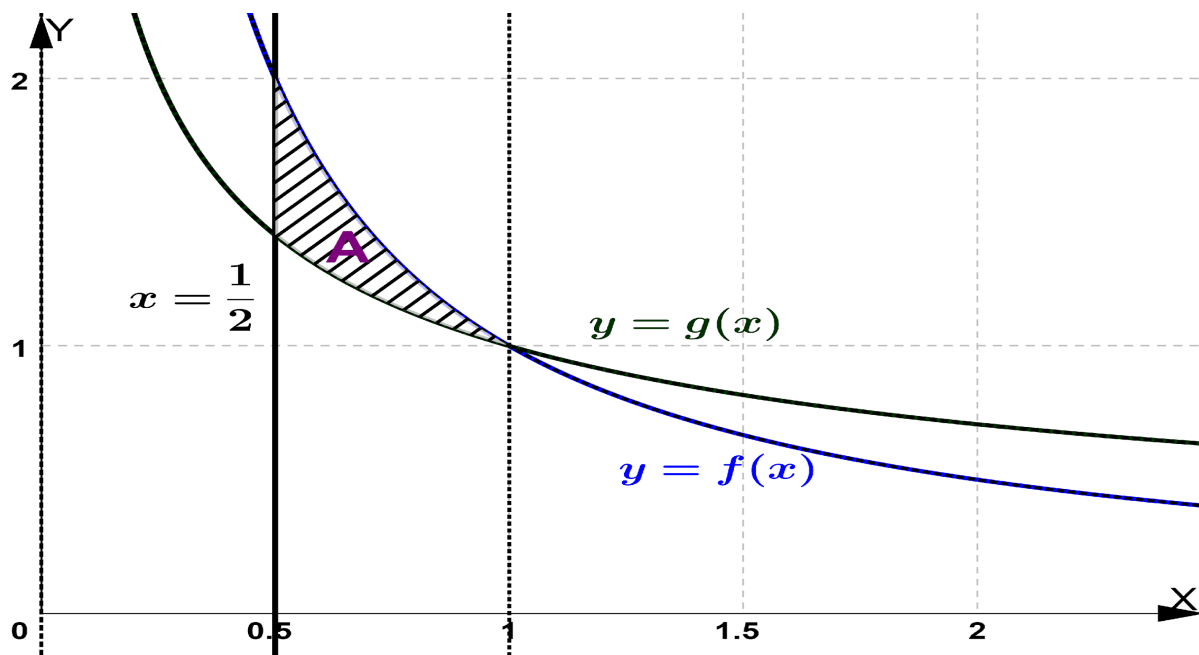
$$f(x) = g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty ; f(x) = g(x) = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Luego, f y g tienen de asíntota vertical el eje Y y de asíntota horizontal en $+\infty$ el eje X .

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 ; g'(x) = \frac{0 \cdot \sqrt{x} - 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} < 0. \text{ Luego, } f \text{ y } g \text{ son decrecientes.}$$

Para la recta vertical, $x = \frac{1}{2}$ resulta $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2} \cong 1,4$ y $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

La región cuya área se pide es



El área que se pide es $A = \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$.

Una primitiva es $p(x) = \ln \ln x - 2\sqrt{x}$. Por la regla de Barrow,

$$A = p(1) - p\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \ln 1 - 2\sqrt{1} - \left(\ln \ln \frac{1}{2} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \ln \ln 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} - 2 = \ln \ln 2 + \sqrt{2} - 2 \cong 0,1$$

3.- Halla las rectas tangente y normal en el punto (1, 1) a cada una de las curvas siguientes:

(a) La curva de ecuación $y = x$.

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$

es rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ y la de la recta normal es rn: $y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$.

En este caso, $f(x) = x$; $f'(x) = 1$; $x_0 = 1, f'(x_0) = f'(1) = 1$, $f(x_0) = f(1) = 1$.

$$\text{rtg: } y = 1(x - 1) + 1 ; \text{rtg: } y = x ; \quad \text{rn: } y = \frac{-1}{1}(x - 1) + 1 ; \text{rn: } y = -x + 2$$

(b) La curva de ecuación $y = x^2$.

Resolución

En este caso, $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$; $x_0 = 1, f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$, $f(x_0) = f(1) = 1$.

$$\text{rtg: } y = 2(x - 1) + 1 ; \text{rtg: } y = 2x - 1 ; \quad \text{rn: } y = \frac{-1}{2}(x - 1) + 1 ; \text{rn: } y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2}$$

(c) La curva de ecuación $y = x^3$.

Resolución

En este caso, $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$; $x_0 = 1, f'(x_0) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$, $f(x_0) = f(1) = 1$.

$$\text{rtg: } y = 3(x - 1) + 1 ; \text{rtg: } y = 3x - 2 ; \text{rn: } y = \frac{-1}{3}(x - 1) + 1 ; \text{rn: } y = \frac{-1}{3}x + \frac{4}{3}$$

4.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

(a) Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$.

(b) Halla la función derivada f' .

Resolución

Como $|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ entonces $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{1+x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

f está bien definida pues $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \not\leq 0$ y $1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1 \not\geq 0$

Si $x \neq 0$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables

$$\text{siendo } f'(x) = \begin{cases} \frac{1 \cdot (1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 \cdot (1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{0}{1-0} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \frac{0}{1+0} = 0. \text{ Luego, } f \text{ es continua en } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1}{(1+0)^2} = 1. \text{ Luego, } f \text{ es derivable en } x = 0$$

Conclusión: f es continua y derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{(1+x)^2}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(c) Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el origen de coordenadas.

Resolución

Usando la forma mixta de las fracciones, si $x < 0, f(x) = -1 + \frac{1}{1-x}$ y si $x \geq 0, f(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$

Las primitivas de f son de la forma

$$F(x) = \begin{cases} -x - \ln \ln(1-x) + a, & \text{si } x < 0 \\ x - \ln \ln(1+x) + b, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Como F debe pasar por el origen de coordenadas, entonces $F(0) = 0$

Al ser f continua por el teorema fundamental del cálculo integral F es derivable y en particular continua en $x = 0$. Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) = 0 \Rightarrow 0 - \ln \ln(1-0) + a = 0 - \ln \ln(1+0) + b = 0.$$

Es decir, $a = b = 0$. Por tanto, la primitiva que se pide es

$$F(x) = \begin{cases} -x - \ln \ln(1-x), & \text{si } x < 0 \\ x - \ln \ln(1+x), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

5.-

(a) Dibuja la región limitada por el eje OY, la curva de ecuación $y = x^3$ y la recta normal a esta curva en el punto (1, 1).

(b) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

Resolución

La ecuación de la recta normal a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$

es $rn: y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$; $x_0 = 1$

$$f'(x_0) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3 \quad , \quad f(x_0) = f(1) = 1 ;$$

$$rn: y = \frac{-1}{3}(x - 1) + 1 ; \quad rn: y = \frac{-1}{3}x + \frac{4}{3} = \frac{4-x}{3}$$

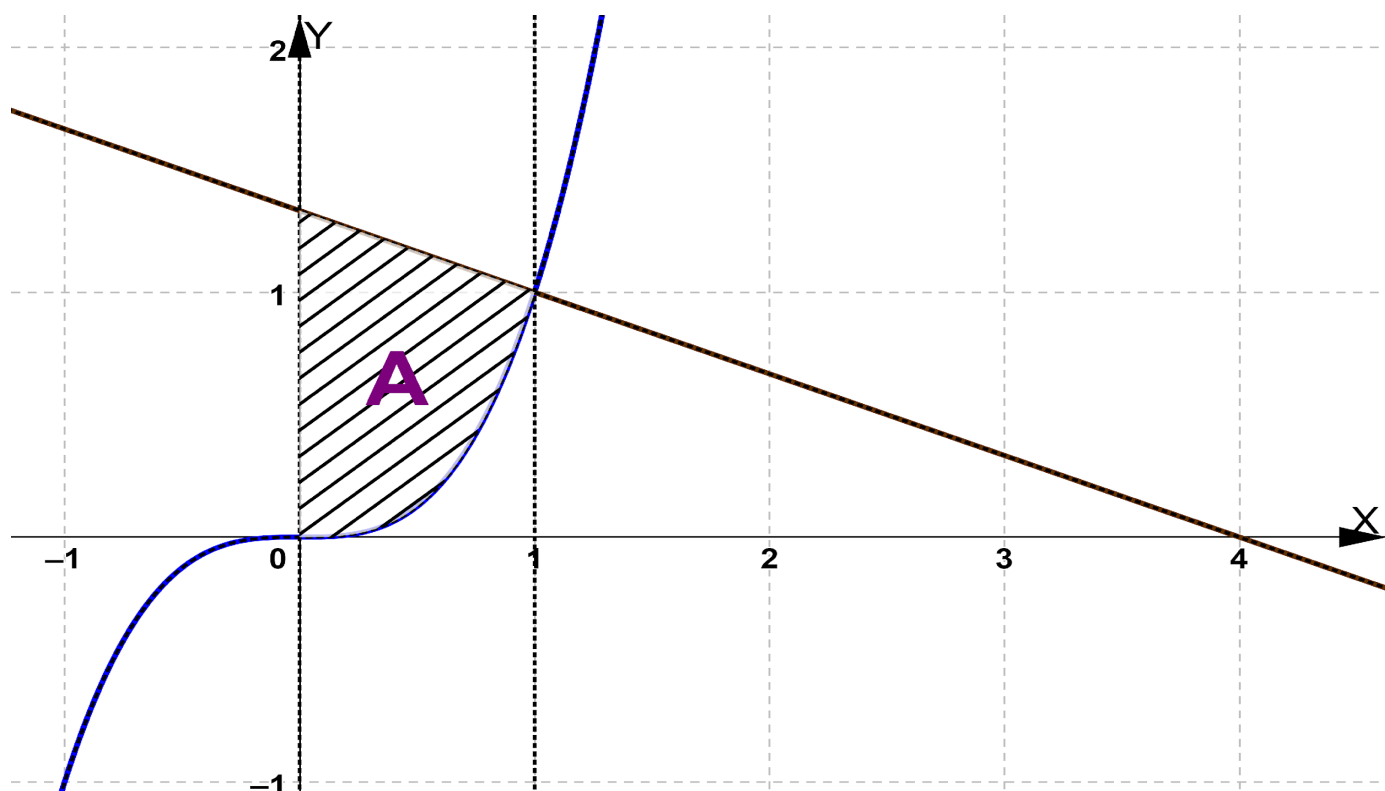
Puntos de corte de la recta normal y la curva: $\{y = \frac{4-x}{3} \quad y = x^3 ; \frac{4-x}{3} = x^3 ; 3x^3 + x - 4 = 0$.

Usando la regla de Ruffini, $\begin{array}{r|rrrr} 3 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ & & 3 & 4 & 3 \end{array}$, queda $(x - 1)(3x^2 + 3x + 4) = 0$; $x = 1$, $3x^2 + 3x + 4 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{-3 \pm \sqrt{-39}}{6} \text{ (sin solución). El único punto de corte es el punto de tangencia (1, 1).}$$

Observamos también que $y = \frac{4-x}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 4$ y para $x = 0$, $y = \frac{4-0}{3} = \frac{4}{3}$. Luego, la recta normal

corta a los ejes en $(4, 0)$ y en $(0, \frac{4}{3})$



$$\text{El área que se pide es } A = \int_0^1 \left(\frac{4-x}{3} - x^3 \right) dx = \int_0^1 \frac{4-x-3x^3}{3} dx.$$

$$\text{Una primitiva es } p(x) = \frac{4x - \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{4}}{3} = \frac{16x - 2x^2 - 3x^3}{12}.$$

Por la regla de Barrow, $A = p(1) - p(0) = \frac{16.1 - 2.1^2 - 3.1^3}{12} - \frac{16.0 - 2.0^2 - 3.0^3}{12} = \frac{11}{12} \cong 0,92 \text{ u}^2$.

6.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$.

(a) Determina a y b sabiendo que la curva de ecuación $y = f(x)$ tiene en el punto de abscisa $x = 1$ una inflexión con tangente horizontal.

Resolución

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7 \quad f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad f''(x) = 6x + 2a$$

Como tiene un punto de inflexión en $x = 1$, entonces $f''(1) = 0$. Luego, $6.1 + 2a = 0$, $a = -3$ quedando $f'(x) = 3x^2 - 6x + b$

Como en $x = 1$ la recta tangente es horizontal, entonces $f'(1) = 0$. Luego, $3.1^2 - 6.1 + b = 0$, $b = 3$.

Conclusión: $a = -3$, $b = 3$ y $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$

(b) ¿Corta esta curva al eje OX entre los puntos $x = 0$ y $x = 2$? Justifica la respuesta.

Resolución

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7; f(0) = 0^3 - 3.0^2 + 3.0 + 7 = 7; f(2) = 2^3 - 3.2^2 + 3.2 + 7 = 9$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2 \geq 0.$$

Luego, f es creciente en $\mathbb{R}$ y, por tanto, si cortara al eje OX en un punto c entre 0 y 2 entonces $f(c) = 0$, pero como f es creciente sería $f(0) \leq f(c) \leq f(2) \Rightarrow 7 \leq 0 \leq 9$, cosa que es absurda.

Conclusión: la curva no corta al eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$

7.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = +\sqrt{x^2 + x + 1} - x$

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Resolución

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x+1} = 2x+1. \text{ Elevando al cuadrado los dos miembros:}$$

$$4(x^2 + x + 1) = 4x^2 + 4x + 1; 4 = 1 \text{ cosa que es imposible.}$$

$$\text{Luego, } f'(x) > 0 \text{ (f creciente) } \quad \text{ó} \quad f'(x) < 0 \text{ (f decreciente); como } f'(0) = \frac{2.0+1}{2\sqrt{0^2+0+1}} - 1 = \frac{-1}{2} < 0$$

entonces $f'(x) < 0$, f es decreciente en $\mathbb{R}$.

(b) Calcula las asíntotas de la gráfica de f .

Resolución

Como $f(x) = +\sqrt{x^2 + x + 1} - x$ es continua en $\mathbb{R}$ no hay asíntotas verticales.

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - x)(\sqrt{x^2+x+1} + x)}{\sqrt{x^2+x+1} + x} = \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1} + x} = \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} + \frac{x}{x}} =$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2}. \text{ Luego, } f \text{ tiene asíntota horizontal en } +\infty \text{ de ecuación } y = \frac{1}{2}.$$

$$f(x) = f(-x) = [\sqrt{(-x)^2 - x + 1} - (-x)] = (\sqrt{x^2 - x + 1} + x) = +\infty$$

(c) Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $f(x) \geq \frac{1}{2}$.

Resolución

Al ser f decreciente y $f(x) \rightarrow +\infty$, $f(x) \geq \frac{1}{2}$ se concluye que para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq \frac{1}{2}$

8.-

(a) Dibuja la región del plano limitada por el eje de abscisas, las rectas de ecuaciones $x = \frac{1}{e}$ y $x = 1$ y la gráfica de la función f definida para $x > 0$ por $f(x) = \frac{-\ln \ln x}{x^2}$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

(b) Calcula la altura h que debe tener un rectángulo de base $1 - \frac{1}{e}$ para que su área sea igual a la de la región descrita en el apartado anterior.

Resolución

Como $f(x) = \frac{-\ln \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, la gráfica de f sólo corta al eje X en $(1, 0)$

$f(x) = \frac{-(-\infty)}{0^+} = +\infty$, $\frac{1}{0^+} = +\infty$, $(+\infty) = +\infty$ y $f(x) = \frac{-\infty}{+\infty}$ Indeterminación.

Regla de L'Hôpital: $\frac{(-\ln \ln x)'}{(x^2)'} = \frac{-1/x}{2x} = \frac{-1}{2x^2} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

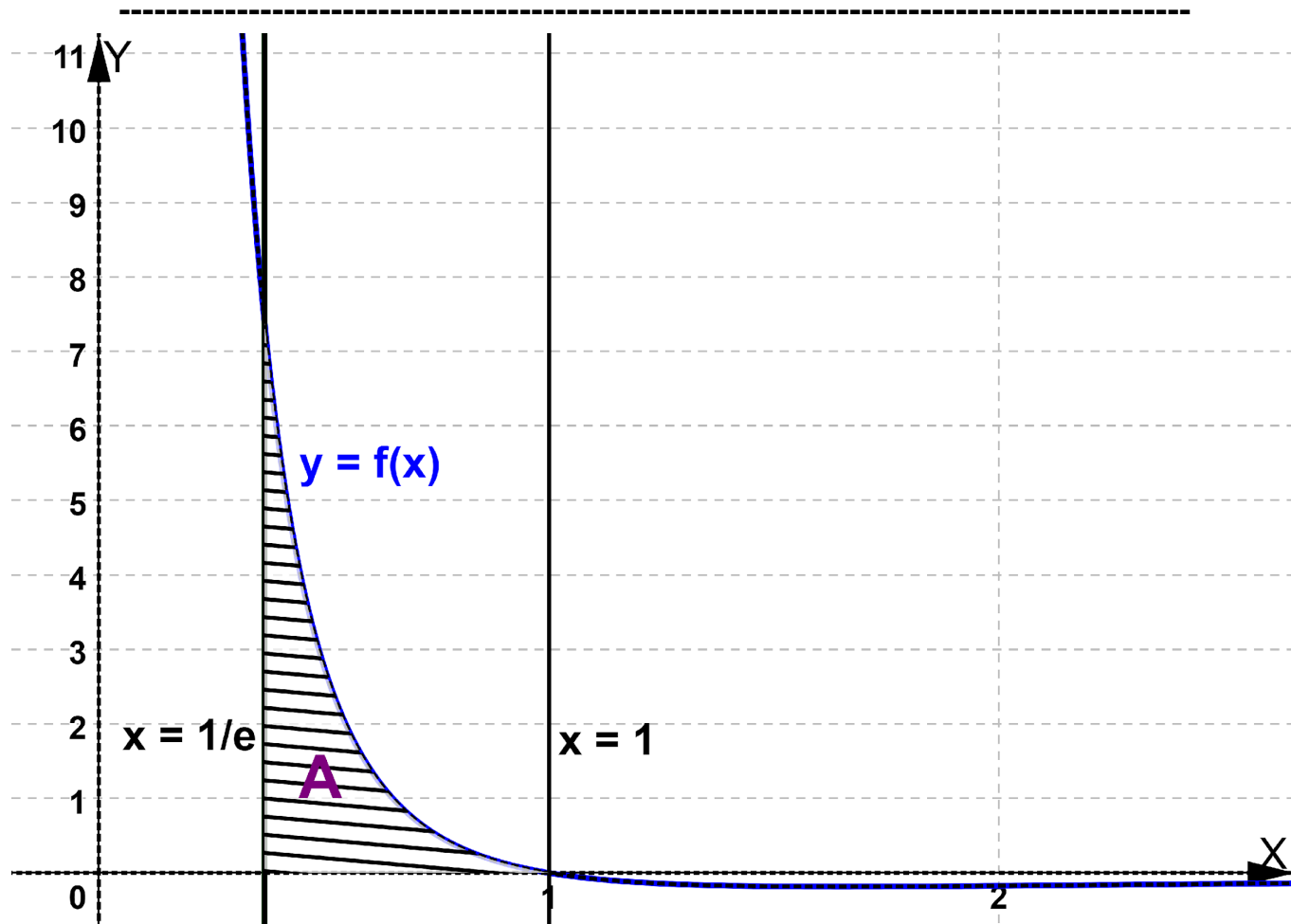
Por otra parte, $f'(x) = \frac{\frac{-1}{x}x^2 - (-\ln \ln x) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2\ln \ln x - 1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \ln \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{1/2} = \sqrt{e}$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(0, \sqrt{e})$	$\sqrt{e}$	$(\sqrt{e}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente

Mínimo relativo: $x = e^{1/2}$, $y = f(e^{1/2}) = \frac{-\ln \ln(e^{1/2})}{(e^{1/2})^2} = \frac{-1/2}{e} = \frac{-1}{2e}$. Punto $(\sqrt{e}, \frac{-1}{2e})$

Para $x = \frac{1}{e} = e^{-1}$, $y = f(e^{-1}) = \frac{-\ln \ln(e^{-1})}{(e^{-1})^2} = e^2$ y para $x = 1$, $y = f(1) = \frac{-\ln \ln 1}{1^2} = 0$



El área de la región es $A = \int_{1/e}^1 \frac{-\ln \ln x}{x^2} dx$. Para encontrar una primitiva usamos la integración por partes:

$$\left[u = \ln \ln x \quad \frac{1}{x} dx \quad dv = \frac{-1}{x^2} dx \quad v = \frac{1}{x} \right];$$

$$\int \frac{-\ln \ln x}{x^2} dx = \frac{\ln \ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{\ln \ln x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1 + \ln \ln x}{x} + k.$$

Una primitiva es $F(x) = \frac{1 + \ln \ln x}{x}$.

Por la regla de Barrow, $A = F(1) - F(1/e) = \frac{1 + \ln \ln 1}{1} - \frac{1 + \ln \ln (1/e)}{1/e} = 1 - 0 \cdot e = 1$

Hallemos la altura, h , del rectángulo: $1 = A = A(\text{rectángulo}) = \text{base} \cdot \text{altura} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)h = \frac{e-1}{e}h$.

Despejando, la altura es $h = \frac{e}{e-1} \cong 1,58$ u

(c) Enuncia el teorema que nos permite afirmar que existe un punto $c \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ tal que $f(c) = h$.

Resolución

Es el teorema del valor medio para integrales que nos dice que si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ entonces

existe un $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c)$. En nuestro caso $[a, b] = [1/e, 1]$

9.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x$.

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = a$.

Resolución

La ecuación de la recta tangente en el punto $A(a, f(a))$ es $rtg: y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

En este caso, $f(a) = e^a$ y como $f'(x) = e^x$ entonces $f'(a) = e^a$.

La ecuación de la recta tangente es $rtg: y = e^a(x - a) + e^a \Rightarrow rtg: y = e^a x + e^a(1 - a)$

(b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que es paralela a la recta de ecuación $2x - 2y + 1 = 0$.

Resolución

Como la recta tangente es paralela a $r: 2x - 2y + 1 = 0$, $r: y = x + \frac{1}{2}$ tiene la misma pendiente.

La pendiente de la recta tangente en $x = a$ es $f'(a) = 1 \Rightarrow e^a = 1 \Rightarrow a = 0$.

Por tanto, se pide la rtg en $x = 0$, que usando (a) es $rtg: y = e^0 x + e^0(1 - 0) \Rightarrow rtg: y = x + 1$

(c) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 0)$ y es tangente a la gráfica de f

Resolución

Por el (a) $rtg: y = e^a x + e^a(1 - a)$. Y como pasa por $(1, 0)$ entonces $0 = e^a 1 + e^a(1 - a) = e^a(2 - a)$

Luego, como $e^a > 0$ debe ser $2 - a = 0$, $a = 2$ y entonces la recta que piden es $r: y = e^2 x - e^2$

10.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \left(\frac{x + \sqrt{x^2}}{2} \right)^2$.

(a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

Resolución

$\sqrt{x^2} = |x|$, $f(x) = \left(\frac{x + |x|}{2} \right)^2$; $|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x - x}{2} \right)^2, & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x + x}{2} \right)^2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x^2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Si $x \neq 0$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables

siendo $f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 2x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0^2$. Luego, f es continua en $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2 \cdot 0 = 0$. Luego, f es derivable en $x = 0$

(b) Determina los intervalos de crecimiento de f .

Resolución

$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x^2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 2x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$; $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Luego, f es constante en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$

(c) Calcula $\int_{-3}^3 3 f(x) dx$

Resolución

Por la linealidad de la integral definida y por la propiedad de aditividad respecto al intervalo de integración: $I = \int_{-3}^3 3 f(x) dx = 3 \int_{-3}^3 f(x) dx = 3 \left[\int_{-3}^0 0 dx + \int_0^3 x^2 dx \right] = 3 \int_0^3 x^2 dx = \int_0^3 3x^2 dx$

Una primitiva es $p(x) = x^3$. Por la regla de Barrow, $I = p(3) - p(0) = 3^3 - 0^3 = 27$

11.-

(a) Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange.

Resolución

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

(b) De una función $f: [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que es derivable y que los valores mínimo y máximo de su función derivada f' son, respectivamente, 7 y 9. Justifica razonadamente cuál o cuáles de los siguientes casos no pueden darse: (i) $f(2) = 6$ y $f(5) = 8$ (ii) $f(2) = 6$ y $f(5) = 30$ (iii) $f(2) = 6$ y $f(5) = 300$

Resolución

Le aplicamos el Teorema del Valor Medio de Lagrange a $f(x)$ en $[2, 5]$, sabiendo que en dicho intervalo se verifica $7 < f'(x) < 9$

En el caso (i) tenemos $[f(5) - f(2)] / (5 - 2) = f'(c) = 2/3$ que no verifica $7 < f'(x) < 9$.

En el caso (ii) tenemos $[f(5) - f(2)] / (5 - 2) = f'(c) = 8$ que si verifica $7 < f'(x) < 9$.

En el caso: (iii) tenemos $[f(5) - f(2)] / (5 - 2) = f'(c) = 98$ que no verifica $7 < f'(x) < 9$

12.- Sea $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(1 - \ln x)$. Encuentra una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(1, 1)$

Resolución

Una primitiva de f es $F(x) = \int f(x) dx = \int x(1 - \ln x) dx$. Usamos la integración por partes:

$$\left[u = 1 - \ln x \quad \frac{-1}{x} dx \quad dv = x dx \quad v = \frac{x^2}{2} \right];$$

$$F(x) = \frac{x^2(1 - \ln x)}{2} + \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2(1 - \ln x)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + k = \frac{x^2(3 - 2 \ln x)}{4} + k.$$

$$\text{Como la gráfica de } F \text{ pasa por } (1, 1), F(1) = 1 \Rightarrow \frac{1^2(3 - 2 \ln 1)}{4} + k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4};$$

$$F(x) = \frac{x^2(3 - 2 \ln x) + 1}{4}$$

13.-

(a) Prueba que la ecuación $\cos x = 2x$ tiene solamente una solución en $[0, \pi/2]$.

Resolución

$f(x) = \cos x - 2x$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser el resultado de operar con funciones continuas. En particular lo es en $[0, \pi/2]$. Además, $f(0) = \cos 0 - 3 \cdot 0 + 2 = 3 > 0$ y $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) - 2 \cdot (\pi/2) = -\pi < 0$.

Por el teorema de Bolzano existe al menos un $c \in (0, \pi/2)$ tal que $f(c) = 0$.

Luego, $\cos c - 2c = 0 \Rightarrow \cos c = 2c$ y, por tanto, c es una solución de la ecuación.

Veamos que la solución es única.

Si hubiese dos soluciones, a y b , entonces $f(a) = f(b) = 0$ y, por el teorema de Rolle, existiría un $c' \in (a, b)$ tal que $f'(c') = 0$.

Como $f'(x) = -\sin x - 2 < 0$ entonces $f'(c') < 0$ (contradicción). Luego, hay solución única.

(b) Enuncia uno de los teoremas que hayas utilizado para responder al apartado anterior.

Resolución

Teorema de Bolzano: Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de Rolle: Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y además $f(a) = f(b)$ entonces existe por lo menos un $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.

14.-

(a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la relación $f(x) = |-x^2 + 2x + 3| + x^2 - 4x + 1$.

Resolución

$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)3}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2}$, $x = -1$, $x = 3$. La parábola $y = -x^2 + 2x + 3$ es cóncava y corta al eje X en -1 y 3 .

Luego, $-x^2 + 2x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -1$ ó $x > 3$; $-x^2 + 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$

$|-x^2 + 2x + 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & \text{si } x < -1 \text{ ó } x > 3 \\ -x^2 + 2x + 3, & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow$
 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 6x - 2, & \text{si } x < -1 \text{ ó } x > 3 \\ -2x + 4, & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 6x - 2, & \text{si } x < -1 \text{ ó } x > 3 \\ -2x + 4, & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Si $x \neq -1$, $x \neq 3$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $f'(x) = \begin{cases} 4x - 6, & \text{si } x < -1 \text{ ó } x > 3 \\ -2, & \text{si } -1 < x < 3 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2(-1)^2 - 6(-1) - 2 = 6 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = -2(-1) + 4 = 6 \Rightarrow f$ es continua en -1

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = 4(-1) - 6 = -10 \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = -2$. Luego, f NO es derivable en -1 .

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2 \cdot 3 + 4 = -2 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 - 2 = -2 \Rightarrow f$ es continua en 3

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = -2 \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 4 \cdot 3 - 6 = 6$. Luego, f NO es derivable en 3 .

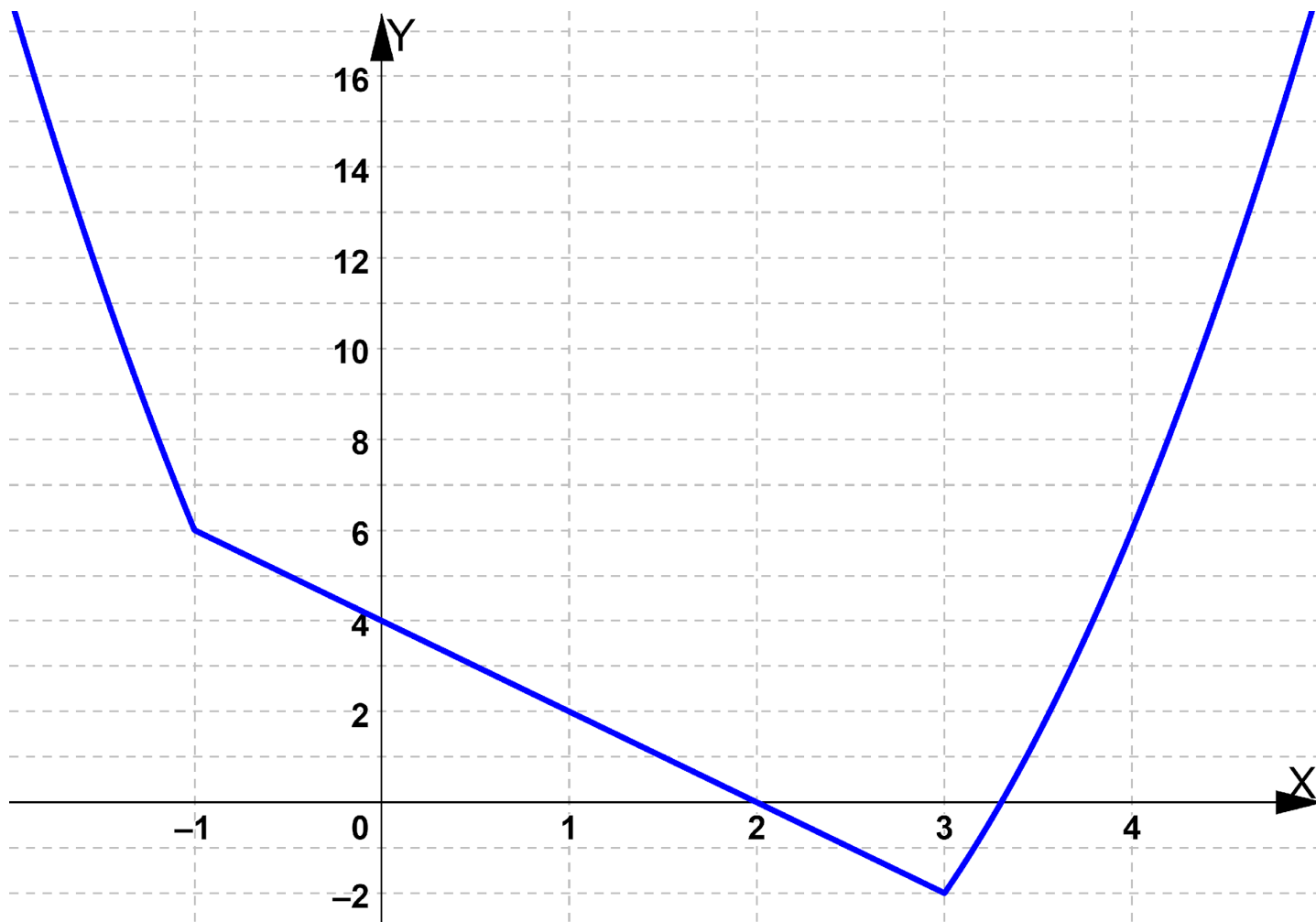
Conclusión: f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-1; 3\}$

(b) Esboza la gráfica de dicha función f.

Resolución

Para la gráfica usamos el (a) y, además, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^2 - 6x - 2) = +\infty$,

$$f(-2) = 2(-2)^2 - 6(-2) - 2 = 18, \quad f(4) = 2 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 - 2 = 6$$



15.-

(a) Halla una primitiva F de la función f: $(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{4}{x(x+2)}$

Resolución

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples: $\frac{4}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$

Multiplicando los dos miembros por $x(x+2)$, obtenemos $4 = A(x+2) + Bx$

Para $x = 0$ se tiene $4 = 2A$, de donde $A = 2$ y para $x = -2$ se tiene $4 = -2B$, de donde $B = -2$.

Las primitivas de f son

$$p(x) = \int f(x) dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2} \right) dx = 2 \ln x - 2 \ln(x+2) + k = 2 \ln \frac{x}{x+2} + k.$$

Para $k = 0$, una primitiva es $F(x) = 2 \ln \frac{x}{x+2}$

(b) Calcula $\int_1^3 f(x) dx$

Resolución

Por la regla de Barrow, $\int_1^3 f(x) dx = F(3) - F(1) = 2 \ln \frac{3}{3+2} - 2 \ln \frac{1}{1+2} = 2 \ln \frac{3/5}{1/3} = 2 \ln \frac{9}{5}$

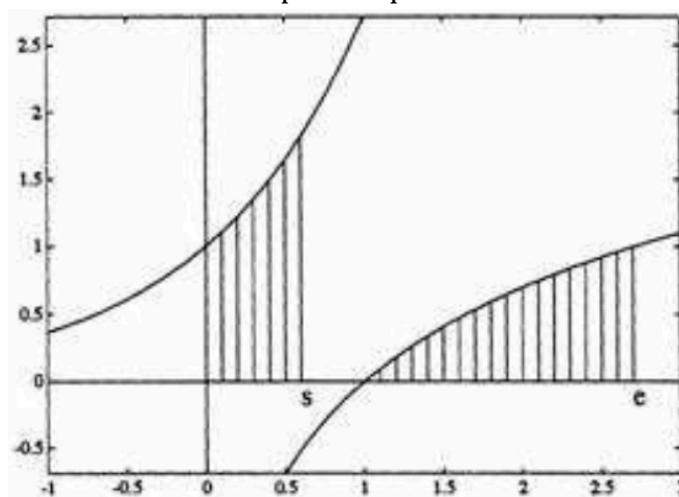
(c) Describe qué relación hay entre la primitiva F calculada y la función G: $(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \int_1^x f(t) dt$.

Resolución

Como al igual que F la función G también es una primitiva de f (por el teorema fundamental del cálculo integral $G'(x) = f(x)$) resulta que F y G se diferencian en una constante.

Además, por la regla de Barrow, $G(x) = \int_1^x f(t) dt = F(x) - F(1)$

16.- Las siguientes gráficas corresponden a las funciones logaritmo neperiano $f(x) = \ln x$ y exponencial $g(x) = e^x$. Encuentra el valor de s para el que las áreas de los recintos rayados son iguales.



Resolución

Las áreas son $A_1 = \int_0^s e^x dx$; $A_2 = \int_1^e \ln x dx$. Para A_1 , una primitiva es $p(x) = e^x$.

Para A_2 : $\left[u = \ln \ln x \quad \frac{1}{x} dx \quad dv = dx \quad v = x \right]; \int \ln \ln x dx = x \ln \ln x - \int 1 dx$; una primitiva es $q(x) = x(\ln x - 1)$

Por la regla de Barrow, como $A_1 = A_2$, $p(s) - p(0) = q(e) - q(1)$

$e^s - e^0 = e(\ln \ln e - 1) - 1(\ln \ln 1 - 1) \Leftrightarrow e^s - 1 = 1 \Leftrightarrow e^s = 2$. Conclusión, $s = \ln \ln 2$

17.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función definida por $f(x) = (x-1)|x-1|$.

(a) Determina los puntos en los que f es derivable y calcula su derivada en cada uno de ellos.

Resolución

$x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$; $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$; $|x-1| = \begin{cases} -(x-1), & \text{si } x < 1 \\ x-1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2, & \text{si } x < 1 \\ (x-1)^2, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Si $x \neq 1$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $f'(x) = \begin{cases} -2(x-1), & \text{si } x < 1 \\ 2(x-1), & \text{si } x > 1 \end{cases}$;

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -(1-1)^2 = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = (1-1)^2 = 0;$$

f es continua en $x = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -2(1-1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2(1-1) = 0 \Rightarrow f$ derivable en $x = 1$.

Conclusión: f es continua y derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(x) = \begin{cases} -2(x-1), & \text{si } x < 1 \\ 2(x-1), & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

(b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

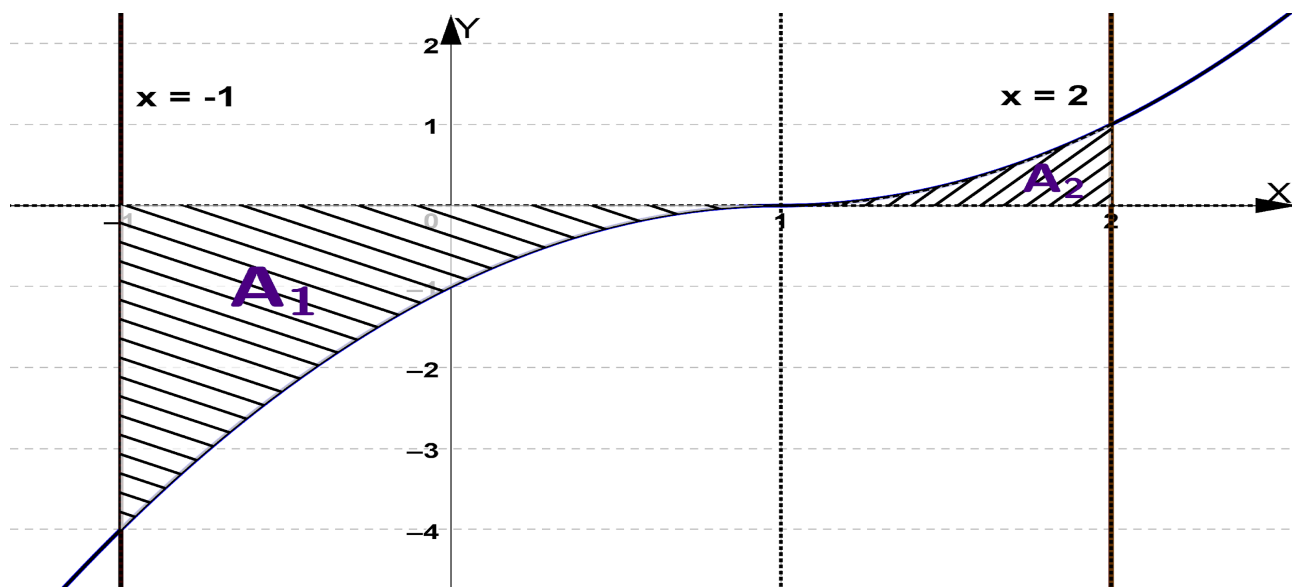
Resolución $f'(x) > 0$. Luego, f es creciente en $\mathbb{R}$

(c) Esboza la gráfica de f .

(d) Calcula el área de las dos regiones limitadas por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones respectivas $x = -1$ y $x = 2$.

Resolución

Para la gráfica de f usamos (a), (b) y que $f(-1) = (-1-1)|-1-1| = -4$;
 $f(2) = (2-1)|2-1| = 1$



El área que se pide es $A = A_1 + A_2$

$$A_1 = \int_{-1}^1 [-f(x)] dx = \int_{-1}^1 (x-1)^2 dx. \text{ Una primitiva de la función integrando es } p(x) = \frac{(x-1)^3}{3}.$$

$$\text{Por la regla de Barrow, } A_1 = p(1) - p(-1) = \frac{(1-1)^3}{3} - \frac{(-1-1)^3}{3} = \frac{8}{3}$$

$$A_2 = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x-1)^2 dx. \text{ Una primitiva de la función integrando es } q(x) = \frac{(x-1)^3}{3}.$$

$$\text{Por la regla de Barrow, } A_2 = q(2) - q(1) = \frac{(2-1)^3}{3} - \frac{(1-1)^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Luego, el área que se pide es } A = A_1 + A_2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3 \text{ u}^2$$

18.-

(a) Calcula las constantes a, b y c sabiendo que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & \text{si } x < 2 \\ bx + c, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$.

Resolución

Teorema de Rolle: Si $f(x)$ es continua en $[m, n]$, derivable en (m, n) y además $f(m) = f(n)$ entonces existe por lo menos un $p \in (m, n)$, tal que $f'(p) = 0$.

En este caso, $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & \text{si } x < 2 \\ bx + c, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, $[m, n] = [0, 4]$.

Si $x \neq 2$, f es continua y derivable independientemente de los valores de a, b y c por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $f'(x) = \begin{cases} 2x + a, & \text{si } x < 2 \\ b, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Para que f cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 4]$:

Debe ser continua en $x = 2 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 2^2 + a \cdot 2 = b \cdot 2 + c \Rightarrow -2a + 2b + c = 4$$

Debe ser derivable en $x = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) \Rightarrow 2 \cdot 2 + a = b \Rightarrow -a + b = 4$

Deber ser $f(0) = f(4) \Rightarrow 0^2 + a \cdot 0 = b \cdot 4 + c \Rightarrow 4b + c = 0$

Nos queda el sistema

$$\begin{cases} -2a + 2b + c = 4 \\ -a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow b = a + 4 \quad 4b + c = 0 \Rightarrow c = -4b = -4(a + 4) = -4a - 16.$$

Sustituyo en la 1ª ecuación:

$$-2a + 2(a + 4) - 4a - 16 = 4 \Rightarrow -4a = 12 \Rightarrow a = -3. \text{ Luego, } b = -3 + 4 = 1; \quad c = -4 \cdot 1 = -4$$

Conclusión: debe ser $a = -3, b = 1, c = -4$ y $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{si } x < 2 \\ x - 4, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$,
 $f'(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{si } x < 2 \\ 1, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

(b) Para la función f del apartado anterior, ¿cuál es el punto cuya existencia garantiza el teorema de Rolle?

Resolución El punto $p \in (0, 4)$ sería tal que $f'(p) = 0 \Rightarrow 2p - 3 = 0 \Rightarrow p = \frac{3}{2}$, que está en $(0, 4)$

19.- Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas, respectivamente, por $f(x) = x(x - 1)$ y $g(x) = |x|$.

(a) Halla la función $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $p(x) = f[g(x)]$ y esboza su gráfica.

Resolución

$$p(x) = f[g(x)] = g(x) \cdot [g(x) - 1] = |x| \cdot (|x| - 1) \Rightarrow$$

$$p(x) = \begin{cases} -x(-x - 1) = x^2 + x, & \text{si } x < 0 \\ x(x - 1) = x^2 - x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si $x \neq 0$, p es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $p'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} p(x) = 0^2 + 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} p(x) = p(0) = 0^2 - 0 = 0 ;$$

p es continua en $x = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} p'(x) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} p'(x) = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow p$ NO derivable en 0.

$$p(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases},$$

$$p'(x) = \begin{cases} 2x + 1 = 0, & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1 = 0, & \text{si } x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{2}$$

Hagamos una tabla de signos de $p'(x)$:

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
$p'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$p(x)$	decreciente	mínimo	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

Mínimos relativos:

$$x = -\frac{1}{2}, y = p\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{-1}{2} = -\frac{1}{4}. \text{ Punto } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

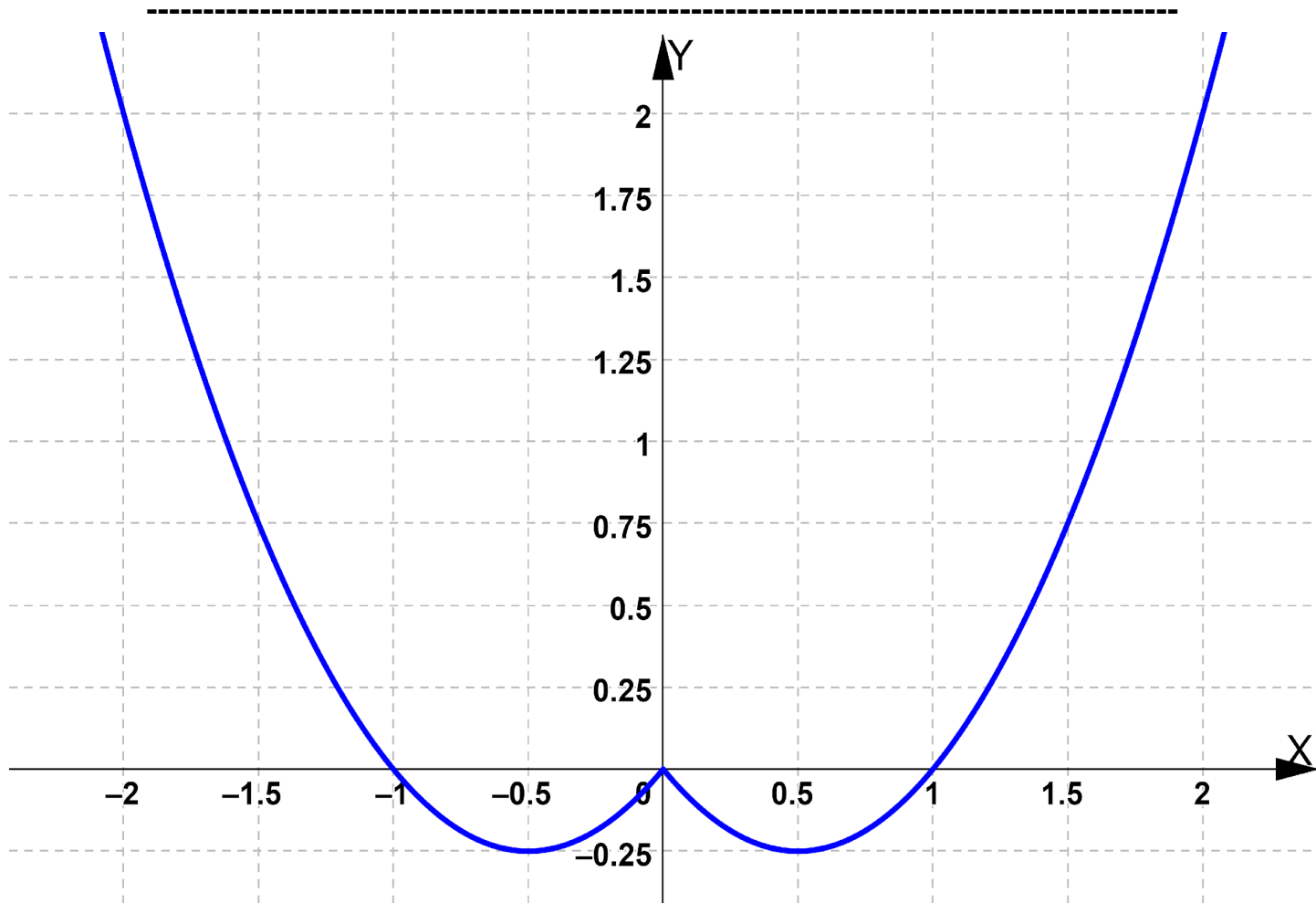
$$x = \frac{1}{2}, y = p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}. \text{ Punto } \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

Máximo relativo: $x = 0, y = p(0) = 0$. Punto (0, 0)

Para la gráfica de p téngase en cuenta también que $p(x) = |x|(|x| - 1) \Leftrightarrow x = 0, x = -1, x = 1$

Luego, la gráfica corta al eje X en (0, 0), (-1, 0) y (1, 0).

Además, como $p(-x) = |-x|(|-x| - 1) = |x|(|x| - 1) = p(x) \Rightarrow$
 $p(2) = p(-2) = |-2|(|-2| - 1) = 2$



(b) Halla la función $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $q(x) = g[f(x)]$ y esboza su gráfica.

Resolución

$$f(x) = x(x-1) \quad y \quad g(x) = |x| ; q(x) = g[f(x)] = |f(x)| = |x(x-1)|$$

$$x(x-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \quad y \quad x(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \quad \text{ó} \quad x \geq 1 \Rightarrow$$

$$q(x) = \begin{cases} -x(x-1) = x - x^2, & \text{si } 0 < x < 1 \\ x(x-1) = x^2 - x, & \text{si } x \leq 0 \quad \text{ó} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Si $x \neq 0, x \neq 1$ q es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $q'(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2x - 1, & \text{si } x \leq 0 \quad \text{ó} \quad x \geq 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} q(x) = 0^2 - 0 = q(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} q(x) = 0 - 0^2 = 0 \Rightarrow q \text{ es continua en } x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} q'(x) = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} q'(x) = 1 - 2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow q \text{ NO es derivable en } x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} q(x) = 1 - 1^2 = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} q(x) = q(1) = 1^2 - 1 = 0 \Rightarrow q \text{ es continua en } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} q'(x) = 1 - 2 \cdot 1 = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} q'(x) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \Rightarrow q \text{ NO es derivable en } x = 1.$$

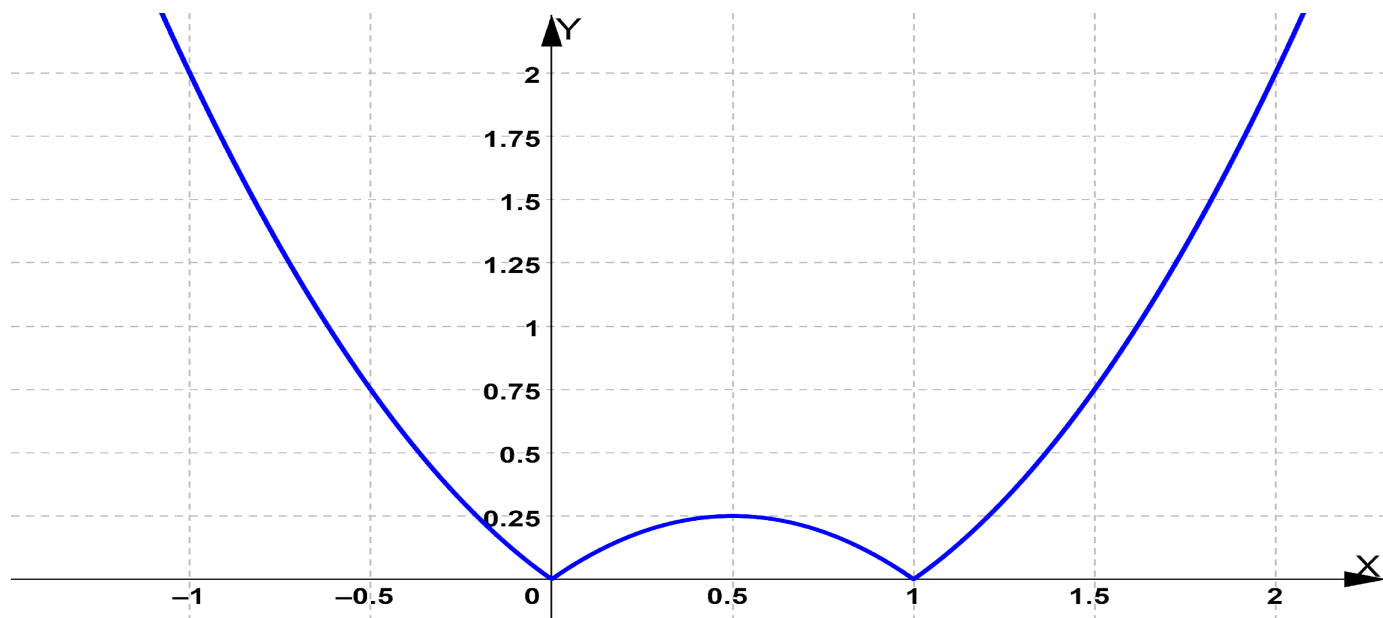
$q'(x) = \begin{cases} 1 - 2x = 0, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2x - 1 = 0, & \text{si } x \leq 0 \quad \text{ó} \quad x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Hagamos una tabla de signos de $q'(x)$:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$q'(x)$	-	0	+	$\nexists$	-	0	+
$q(x)$	decreciente	mínimo	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

Mínimos relativos: $x = 0$, $y = q(0) = 0$. Punto $(0, 0)$; $x = 1$, $y = q(1) = 0$. Punto $(1, 0)$

Máximo relativo: $x = \frac{1}{2}$, $y = q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Para la gráfica de q téngase

en cuenta también que $q(x) = |x(x - 1)| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x = 1$. Luego, la gráfica corta al eje X en $(0, 0)$ y $(1, 0)$. Además, $q(-1) = |-1(-1 - 1)| = 2$ y $q(2) = |2(2 - 1)| = 2$



20.- Usando el método de integración por partes, calcula la integral $\int_0^1 \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right) dx$

Resolución

$I = \int_0^1 \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right) dx$. Para hallar una primitiva usamos la integración por partes:

$$\left[u = \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right) \quad du \quad dv = dx \quad v = x \right]$$

$$du = \frac{1}{\frac{x+1}{2-x}} \cdot \frac{1(2-x) - (x+1)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x}{x+1} \cdot \frac{3}{(2-x)^2} = \frac{-3}{(x+1)(x-2)}.$$

$$\text{Luego, } \int \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right) dx = x \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right) + \int \frac{3x}{(x+1)(x-2)} dx.$$

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples: $\frac{3x}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$

Multiplicando los dos miembros por $(x+1)(x-2)$, tenemos $3x = A(x-2) + B(x+1)$

Para $x = -1$ se tiene $-3 = -3A$, de donde $A = 1$ y para $x = 2$ se tiene $6 = 3B$, de donde $B = 2$.

$$\int \frac{3x}{(x+1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} \right) dx = \ln |x+1| + 2 \ln |x-2| + k.$$

Luego, una primitiva de la función integrando es $p(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right) + \ln |x+1| + 2 \ln |x-2|$.

Por la regla de Barrow,

$$I = p(1) - p(0) = 1 \ln\left(\frac{1+1}{2-1}\right) + \ln \ln |1 + 1| + 2 \ln \ln |1 - 2| - \left[0 \ln\left(\frac{0+1}{2-0}\right) + \ln \ln |0 + 1| + 2 \ln \ln |0 - 2| \right]$$

21.-

(a) Halla la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos (0, 1), (1, 0) y (2, 3).

Resolución

Sustituimos las coordenadas de los puntos en la ecuación de la parábola,

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 3 \end{cases}$$

Operando y simplificando,

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ 4a + 2b + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 4a + 2b = 2 \end{cases}$$

Restando las ecuaciones, $a = 2$; $b = -1 - a = -1 - 2 = -3$. Luego, la ecuación es $y = 2x^2 - 3x + 1$

(b) Dibuja la región limitada por dicha parábola y la recta normal a la parábola en el punto (0, 1).

(c) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

Resolución

Sabemos que la parábola pasa por los puntos (0, 1), (1, 0) y (2, 3).

Además, $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4}$, $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ y si $x = 0$, $y = 1$ con lo que la

parábola corta a los ejes en $(1, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y en $(0, 1)$

Como $(2x^2 - 3x + 1)' = 4x - 3 = 0$ si $x = \frac{3}{4}$, $y = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\frac{3}{4} + 1 = -\frac{1}{8}$ se trata de una parábola convexa

de vértice $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$.

La ecuación de la recta normal a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$

es $rn: y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$; $f'(x) = 4x - 3$; $x_0 = 0$; $f(x_0) = 1$

$$f'(x_0) = f'(0) = 4 \cdot 0 - 3 = -3 \quad ; \quad rn: y = \frac{-1}{-3}(x - 0) + 1 \quad ; \quad rn: y = \frac{1}{3}x + 1 = \frac{x+3}{3}$$

Puntos de corte de la recta normal y la parábola: $\{y = \frac{x+3}{3} \mid y = 2x^2 - 3x + 1\}$;

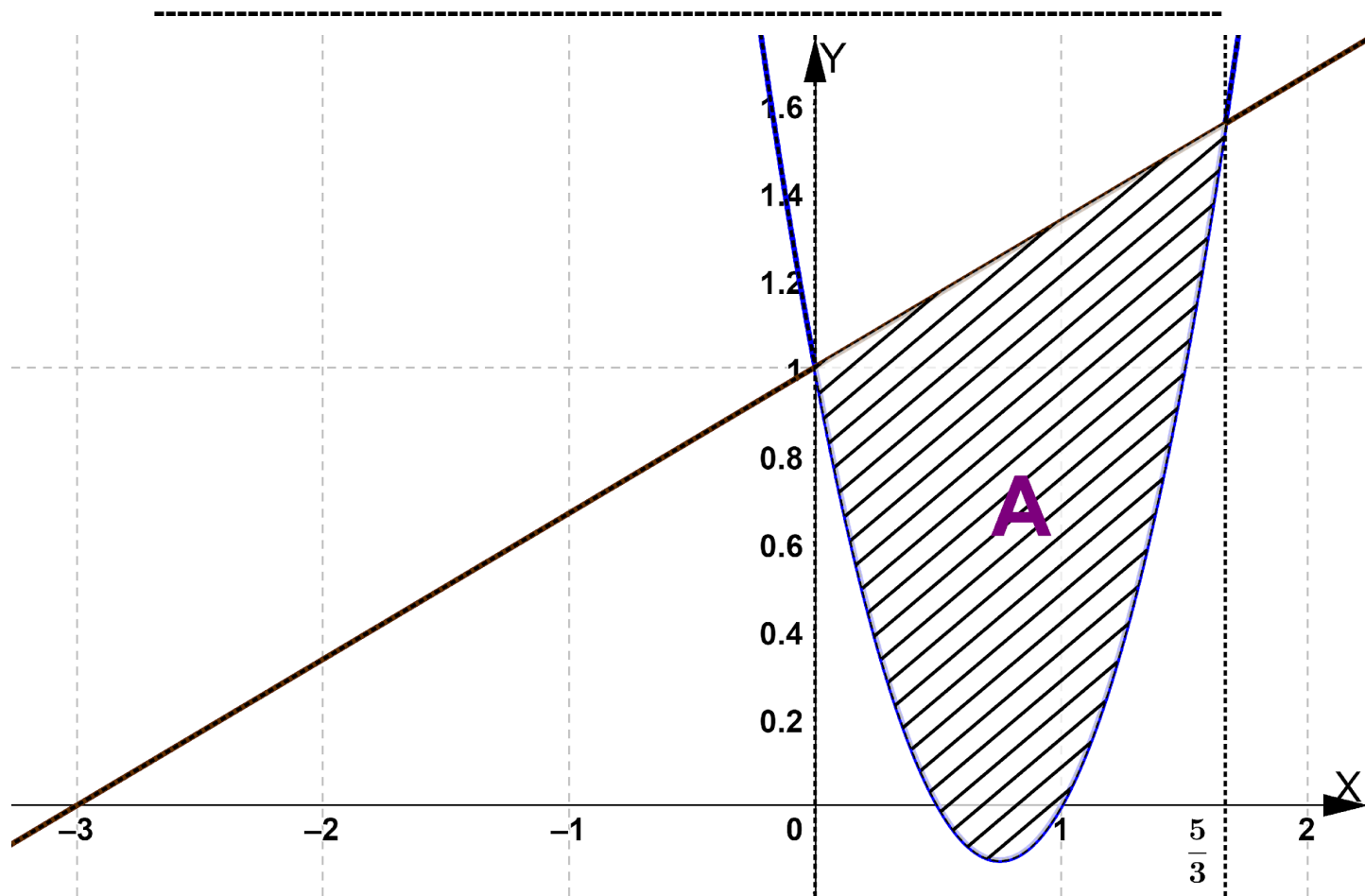
$$\frac{x+3}{3} = 2x^2 - 3x + 1$$

$$6x^2 - 9x + 3 = x + 3 \Leftrightarrow 6x^2 - 10x = 2x(3x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{5}{3}$$

Si $x = 0$, $y = \frac{0+3}{3} = 1$, se obtiene el punto de tangencia (0, 1)

Si $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{\frac{5}{3}+3}{3} = \frac{14}{9}$, se obtiene el punto $\left(\frac{5}{3}, \frac{14}{9}\right)$

Además, como $0 = \frac{x+3}{3} \Leftrightarrow x = -3$, la recta normal corta al eje X en (-3, 0).



El área que se pide es $A = \int_0^{5/3} \left[\frac{10}{3}x + 1 - (2x^2 - 3x + 1) \right] dx = \int_0^{5/3} \left(\frac{10}{3}x - 2x^2 \right) dx$.

Una primitiva es $p(x) = \frac{10}{3} \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} = \frac{5x^2}{3} - \frac{2x^3}{3} = \frac{5x^2 - 2x^3}{3}$.

Por la regla de Barrow, $A = p\left(\frac{5}{3}\right) - p(0) = \frac{5\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{3}\right)^3}{3} - \frac{5 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3}{3} = \frac{125}{81} \cong 1,54 \text{ u}^2$.

22.-

(a) Calcula la integral $\int_0^{\pi/2} t \cos t \, dt$

Resolución

$I = \int_0^{\pi/2} t \cos t \, dt$. Para encontrar una primitiva usamos la integración por partes:

$[u = t \, dt \, dv = \cos t \, dt \, v = \sin t]; \int t \cos t \, dt = t \sin t - \int t \, dx$. Una primitiva es

$p(t) = t \sin t + \cos \cos t$.

Por la regla de Barrow,

$I = p\left(\frac{\pi}{2}\right) - p(0) = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (0 \sin 0 + \cos \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2}$

(b) Sea $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \int_0^x t \cos \cos t \, dt$. Calcula sus máximos y mínimos absolutos, así como los puntos del intervalo $[0, \pi]$ donde se alcanzan dichos extremos.

Resolución

Al ser la función $g(t) = t \cos t$ continua, por el teorema fundamental del cálculo integral f es derivable.

Luego, en $[0, \pi]$, $f'(x) = x \cos \cos x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{\pi}{2}$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(0, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente

Evaluamos f en el máximo absoluto y en los extremos del intervalo ($x = 0, x = \pi$) y entonces el mayor valor corresponderá al máximo absoluto y el menor al mínimo absoluto:

$$f(0) = \int_0^0 t \cos \cos t \, dt = 0 \quad ; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} t \cos \cos t \, dt = \frac{\pi-2}{2} \cong 0,57 \quad ;$$

$$f(\pi) = \int_0^{\pi} t \cos \cos t \, dt = 0$$

Por la regla de Barrow,

$$f(\pi) = p(\pi) - p(0) = \pi \operatorname{sen} \pi + \cos \cos \pi - (0 \operatorname{sen} 0 + \cos \cos 0) = -2$$

El máximo absoluto es $\frac{\pi-2}{2} \cong 0,57$ y se alcanza en $\frac{\pi}{2}$ y el mínimo absoluto es -2 y se alcanza en π .

23.-

(a) Enuncia el teorema de Bolzano.

Resolución

Teorema de Bolzano: Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un $c \in [a, b]$, tal que $f(c) = 0$.

(b) ¿Podemos aplicar el teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 3]$ para asegurar que la ecuación

$x^4 + \frac{1}{x-2} = 0$ tiene alguna solución en dicho intervalo? ¿Y podemos aplicarlo en el intervalo $[-2, 0]$? Justifica las respuestas.

Resolución

Sea la función $f(x) = x^4 + \frac{1}{x-2}$

f es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$ y, por tanto, no es continua en $[0, 3]$ y no podemos aplicarle el teorema de Bolzano en $[0, 3]$. Luego, no podemos asegurar que tenga solución.

f es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$ y, por tanto, es continua en $[-2, 0]$

Como $f(-2) = (-2)^4 + \frac{1}{-2-2} = \frac{31}{2} > 0$ y $f(0) = 0^4 + \frac{1}{0-2} = \frac{-1}{2} < 0$, se puede aplicar el teorema.

Aplicándolo existe al menos $c \in (-2, 0)$ tal que $f(c) = 0$, es decir c es solución de la ecuación.

24.- Aplicando la Regla de L'Hôpital, calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{e^{2x}}$

Resolución

$$f(x) = \frac{x \ln x}{e^{2x}} = \frac{+\infty \cdot (+\infty)}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ Indeterminación.}$$

Regla de L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x \ln x)'}{(e^{2x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}}{2 e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{2 e^{2x}} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ Indeterminación.}$

Otra vez por L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)'}{(2 e^{2x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{4 e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x e^{2x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Luego, aplicando la regla de L'Hôpital, $\frac{x \ln x}{e^{2x}} = 0$

OTROS DEL 1999

1.-

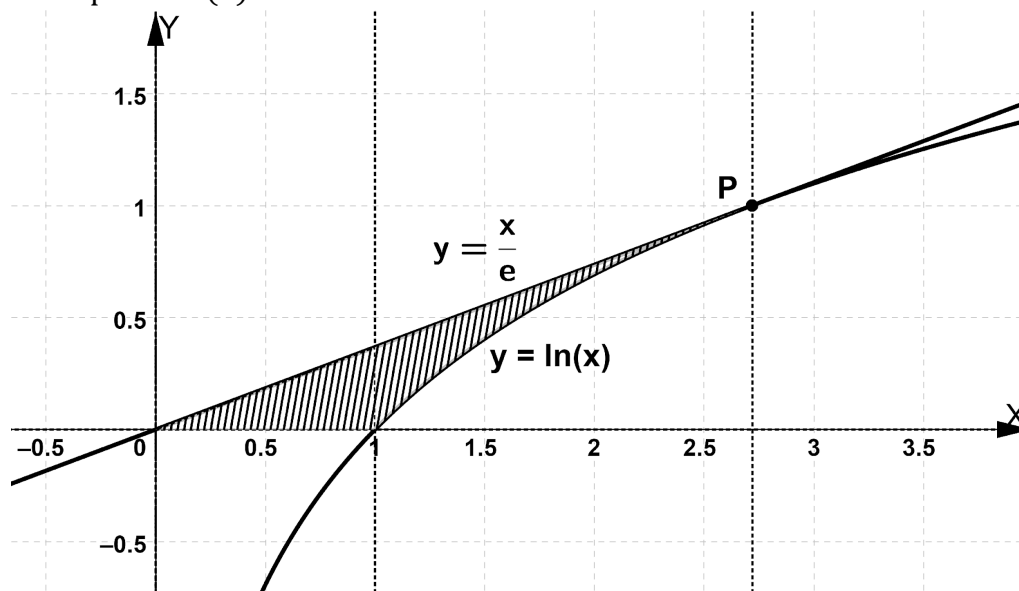
(a) Determina en qué punto la recta $y = \frac{x}{e}$ es tangente a la curva $y = \ln x$.

Resolución

Sea $f(x) = \ln x$; $f'(x) = \frac{1}{x}$. Si $P(a, f(a))$ es el punto de tangencia entonces la pendiente de la recta

tangente, $\frac{1}{e}$ es igual a $f'(a) = \frac{1}{a}$. Luego, $a = e$, $f(e) = \ln e = 1$. El punto de tangencia que piden es $P(e, 1)$

(b) Calcula el área del recinto rayado en la siguiente figura en la que P representa el punto de tangencia entre las curvas del apartado (1)



Resolución

El área que se pide es $A = \int_0^e \left(\frac{x}{e} - \ln x \right) dx$. Para encontrar una primitiva de $\ln x$ usamos la integración

por partes: $\left[u = \ln x \quad \frac{1}{x} dx \quad dv = dx \quad v = x \right]; \int \ln x dx = x \ln x - \int dx$

Una primitiva del integrando de la integral inicial es $p(x) = \frac{1}{e} \frac{x^2}{2} - x \ln \ln x + x = \frac{x^2 - 2ex \ln \ln x + 2ex}{2e}$.

Por la regla de Barrow,

$$A = p(e) - p(0) = \frac{e^2 - 2ee \ln \ln e + 2ee}{2e} - \frac{0^2 - 2e0 \ln \ln 0 + 2e0}{2e} = \frac{e^2}{2e} = \frac{e}{2} = 1,36 \text{ u}^2.$$

2.- Sea f la función definida por $f(x) = (x - 1)|x - 1|$.

(a) ¿Puede aplicarse el teorema de Rolle a f en el intervalo $[0, 2]$?

Resolución

Teorema de Rolle: Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y además $f(a) = f(b)$ entonces existe por lo menos un $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.

$$x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1; \quad x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1; \quad |x - 1| = \begin{cases} -(x - 1), & \text{si } x < 1 \\ x - 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} -(x - 1)^2, & \text{si } x < 1 \\ (x - 1)^2, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Si $x \neq 1$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $f'(x) = \begin{cases} -2(x - 1), & \text{si } x < 1 \\ 2(x - 1), & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -(1 - 1)^2 = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = (1 - 1)^2 = 0 \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -2(1 - 1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2(1 - 1) = 0 \Rightarrow f \text{ derivable en } x = 1.$$

Como f es continua y derivable en $\mathbb{R}$, en particular es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$.

$$f(0) = (0 - 1)|0 - 1| = -1 \neq f(2) = (2 - 1)|2 - 1| = 1.$$

Luego, f no cumple las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 2]$ y, por tanto, no puede aplicarse dicho teorema.

(b) ¿Y a la función f' ?

Resolución

Sea $g(x) = f'(x) = \begin{cases} -2(x - 1), & \text{si } x < 1 \\ 2(x - 1), & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. Si $x \neq 1$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $g'(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } x < 1 \\ 2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -2(1 - 1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) = 2(1 - 1) = 0 \Rightarrow g \text{ es continua en } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x) = -2 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g'(x) = 2 \Rightarrow g \text{ NO es derivable en } x = 1.$$

Luego, f' no cumple las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 2]$ y, por tanto, no puede aplicarse dicho teorema.

(c) ¿Es simétrica la gráfica de f con respecto a algún punto?

Resolución

$$f(1 + h) = (1 + h - 1)|1 + h - 1| = h|h|; \quad f(1 - h) = (1 - h - 1)|1 - h - 1| = -h|-h| = -h|h|$$

Luego, $f(1 - h) = -f(1 + h)$ y, por tanto, f tiene una simetría central con respecto al punto $(1, 0)$.

3.- Sea f la función definida en $[0, \infty)$ por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 + b, & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 6x + c, & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

Contesta razonadamente las siguientes preguntas

(a) ¿Es f continua en todo el intervalo $[0, \infty)$ para $a = 4$, $b = 5$ y $c = -4$?

(b) ¿Es f derivable en todo el intervalo $[0, \infty)$ para $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$?

Resolución

Si $x \neq 1$, $x \neq 3$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables. Además, $f'(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x, & \text{si } 1 < x < 3 \\ 6, & \text{si } 3 < x \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \cdot 1 + a = 2 + a ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1^2 + b = 1 + b$$

Para que f sea continua en $x = 1$ debe ser $2 + a = 1 + b \Rightarrow -a + b = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2 ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow \text{coinciden las derivadas laterales en } x = 1$$

independientemente de los valores de a , b y c .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3^2 + b = 9 + b ; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 6 \cdot 3 + c = 18 + c$$

Para que f sea continua en $x = 3$ debe ser $9 + b = 18 + c \Rightarrow b - c = 9$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = 2 \cdot 3 = 6 ; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 6 \Rightarrow \text{coinciden las derivadas laterales en } x = 3$$

independientemente de los valores de a , b y c .

En el (a), para $a = 4$, $b = 5$ y $c = -4$, se tiene que

$$-a + b = -4 + 5 = 1 \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 1 ; \quad b - c = 5 - (-4) = 9 \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 3.$$

Como conclusión, para $a = 4$, $b = 5$ y $c = -4$ f es continua en todo el intervalo $[0, \infty)$

En el (b), para $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$, se tiene que:

$-a + b = -1 + 2 = 1 \Rightarrow f$ es continua en $x = 1$ y como coinciden las derivadas laterales en $x = 1$ independientemente de los valores de a , b y c entonces f es derivable en $x = 1$.

$b - c = 2 - 3 = -1 \neq 9 \Rightarrow f$ NO es continua en $x = 3$ y, por tanto, tampoco es derivable.

Como conclusión, para $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$ f NO es derivable en todo el intervalo $[0, \infty)$ porque no es derivable en $x = 3$

4.- La curva $y = \sqrt{1 + t^2} - t$ representa un río. En el punto $P(2, 0)$ hay una ciudad desde la que se desea construir una tubería rectilínea hasta el río.

(a) ¿En qué punto Q del río debe terminar la tubería para que esta sea lo más corta posible?

Resolución

Sea $Q(t, \sqrt{1 + t^2} - t)$ un punto de la curva. La función a minimizar es el cuadrado de la distancia

$$\text{entre } P \text{ y } Q: f(t) = d^2(P, Q) = (t - 2)^2 + \left(\sqrt{1 + t^2} - t\right)^2 = (t - 2)^2 + 1 + t^2 - t = 2t^2 - 5t + 5$$

$f'(t) = 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{4}$ que corresponde al mínimo por ser la gráfica de f una parábola convexa.

$$\text{Luego, el punto que se pide es } Q\left(\frac{5}{4}, \sqrt{1 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} - \frac{5}{4}\right) \Rightarrow Q\left(\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{21}}{4}\right).$$

(b) Comprueba que en dicho punto Q la tubería es perpendicular al río.

Resolución

Sea $g(x) = \sqrt{1 + x^2} - x$. Habrá que ver que la recta normal a la gráfica de g en el punto Q pasa por el punto $P(2, 0)$.

La ecuación de la recta normal a la gráfica de una función g en un punto $A(x_0, g(x_0))$

es $rn: y = \frac{-1}{g'(x_0)}(x - x_0) + g(x_0)$. En este caso, $x_0 = \frac{5}{4}$; $g(x_0) = \frac{\sqrt{21}}{4}$; $g'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{1 + x^2} - x}$

$$g'(x_0) = g'\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{2 \cdot \frac{5}{4} - 1}{2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{4}} = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{\sqrt{21}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{21}}; rn: y = \frac{-1}{\frac{3}{\sqrt{21}}}\left(x - \frac{5}{4}\right) + \frac{\sqrt{21}}{4}$$

Operando, $rn: y = \frac{-\sqrt{21}}{3}\left(x - \frac{5}{4}\right) + \frac{\sqrt{21}}{4}$. Sustituyendo, las coordenadas de $P(2, 0)$

$$\frac{-\sqrt{21}}{3}\left(2 - \frac{5}{4}\right) + \frac{\sqrt{21}}{4} = \frac{-\sqrt{21}}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{21}}{4} = 0. \text{ Luego, la recta normal pasa por } P, \text{ como se pretendía.}$$

5.- Sea f la función definida por $f(x) = \ln(1 + x)$ y sea $p(x)$ el polinomio dado

por $p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$. Calcula $\frac{f(x) - p(x)}{x^2}$

Resolución

$$f(x) = \ln(1 + x); f'(x) = \frac{1}{1 + x}; f''(x) = \frac{0 \cdot (1 + x) - 1 \cdot 1}{(1 + x)^2} = \frac{-1}{(1 + x)^2}; f(0) = \ln(1 + 0) = 0$$

$$f'(0) = \frac{1}{1 + 0} = 1; f''(0) = \frac{-1}{(1 + 0)^2} = -1; p(0) = f(0) + f'(0) \cdot 0 + \frac{1}{2}f''(0) \cdot 0^2 = f(0) = 0$$

$$\frac{f(x)-p(x)}{x^2} = \frac{f(0)-p(0)}{0^2} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación. Aplicamos la regla de L'Hôpital:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x)-p(x)]'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)-p'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - [f'(0) + f''(0)x]}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - (1-x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1-x)(1+x)}{2x(1+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2(1+x)} = \frac{0}{2(1+0)} = 0. \text{ Por la regla de L'Hôpital, el límite que se pide vale 0.}$$

6.- Sean f y g las funciones definidas por $f(x) = a + bx^2 + x^4$ y $g(x) = c - x^3$.
Calcula los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ de modo que las gráficas de f y g se corten en el punto $(1, 1)$ y sean tangentes en dicho punto.

Resolución

Como se cortan en $(1, 1)$ entonces $f(1) = 1$ y $g(1) = 1$

$$\text{Sustituyendo, } a + b \cdot 1^2 + 1^4 = 1 \Rightarrow a + b = 0 \quad ; \quad c - 1^3 = 1 \Rightarrow c = 2$$

$$f'(x) = 2bx + 4x^3, \quad g'(x) = -3x^2. \text{ Como son tangentes en } (1, 1) \text{ entonces } f'(1) = g'(1)$$

$$\text{Sustituyendo, } 2b \cdot 1 + 4 \cdot 1^3 = -3 \cdot 1^2 \Rightarrow b = \frac{-7}{2}. \text{ Y, por tanto, } a = -b = \frac{7}{2}$$

$$\text{Conclusión: debe ser } a = \frac{7}{2}, \quad b = \frac{-7}{2}, \quad c = 2$$

7.- Calcula el área del recinto limitado por las curvas cuyas ecuaciones son

$$x = y^2 \quad x + 2y = 3 \quad y = 0 \quad x = 2$$

Resolución

La parábola $x = y^2$ tiene dos ramas, $y = +\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$

$$\text{En cuanto a la recta, si } x = 0, 0 + 2y = 3, y = \frac{3}{2}, \text{ si } y = 0, x + 2 \cdot 0 = 3, x = 3.$$

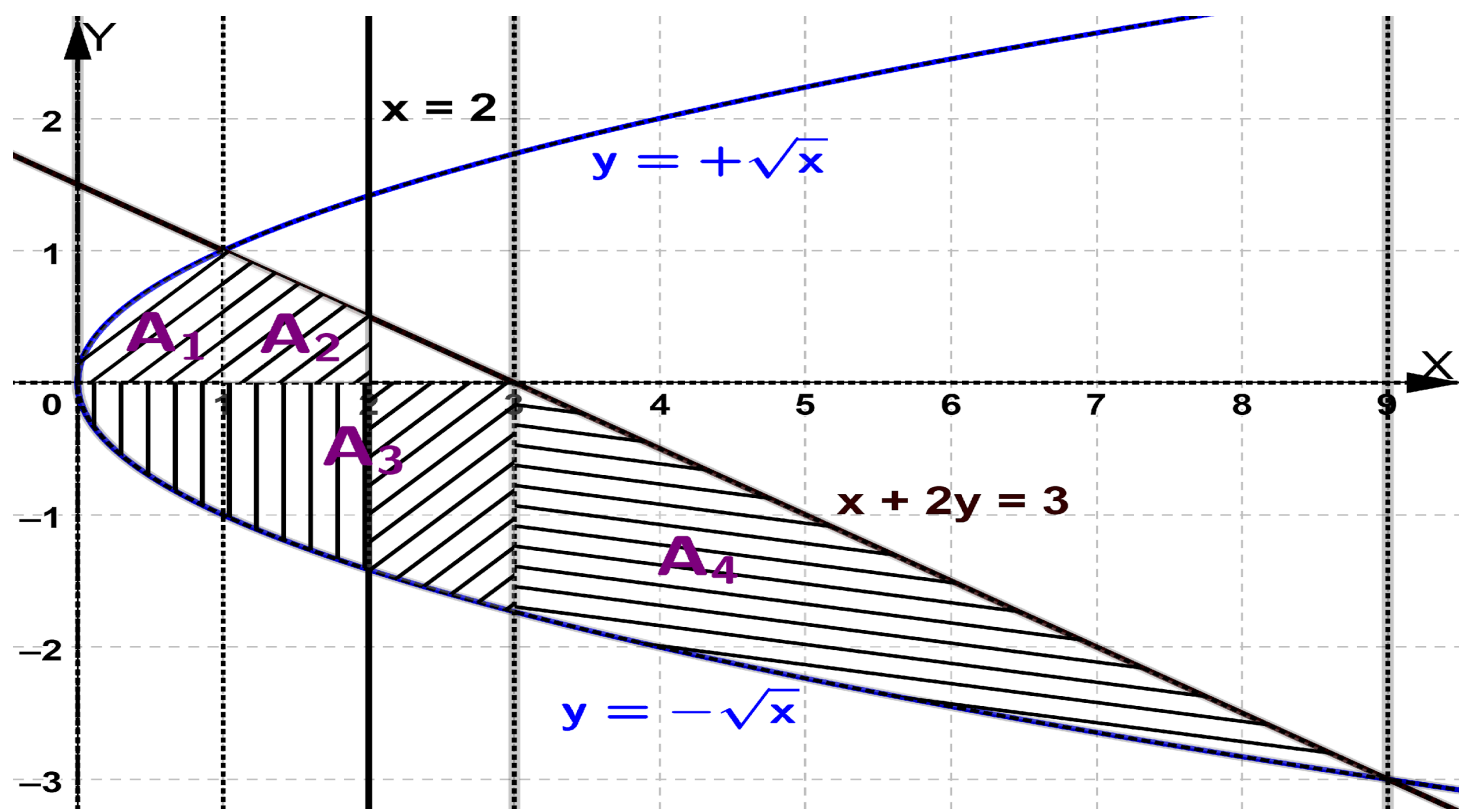
La recta corta a los ejes en $(3, 0)$ y $(0, \frac{3}{2})$

$$\text{Puntos de corte de la recta y la parábola: } \{x = y^2 \mid x + 2y = 3\}.$$

$$\text{Sustituyendo, } y^2 + 2y = 3, y^2 + 2y - 3 = 0.$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2}, y = -3, x = (-3)^2 = 9, \text{ punto } (9, -3); y = 1, x = 1^2 = 1, \text{ punto } (1, 1)$$

Dibujamos el recinto cuya área se pide:



El área que se pide es $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

$$A_1 = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx = \int_0^1 x^{1/2} \, dx. \text{ Una primitiva es } p(x) = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}.$$

$$\text{Por la regla de Barrow, } A_1 = p(1) - p(0) = \frac{2\sqrt{1^3}}{3} - \frac{2\sqrt{0^3}}{3} = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = \int_1^2 \frac{3-x}{2} \, dx. \text{ Una primitiva es } q(x) = \frac{3x - \frac{x^2}{2}}{2} = \frac{6x - x^2}{4}.$$

$$\text{Por la regla de Barrow, } A_2 = q(2) - q(1) = \frac{6 \cdot 2 - 2^2}{4} - \frac{6 \cdot 1 - 1^2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$A_3 = - \int_0^2 (-\sqrt{x}) \, dx = \int_0^2 x^{1/2} \, dx. \text{ La primitiva sabemos que es } p(x) = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}.$$

Por la regla de Barrow, $A_3 = p(3) - p(0) = \frac{2\sqrt{3^3}}{3} - \frac{2\sqrt{0^3}}{3} = 2\sqrt{3}$

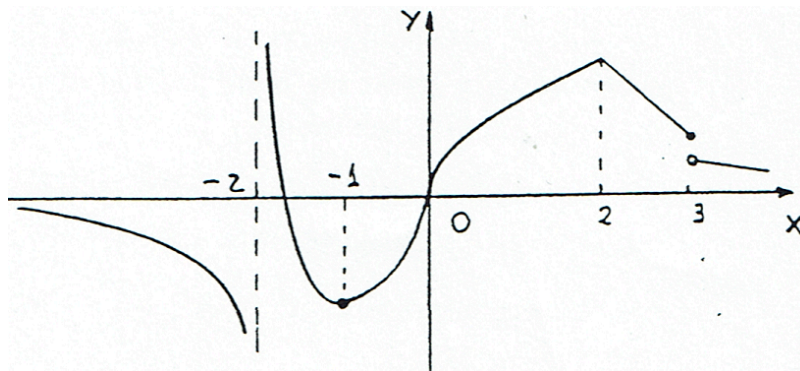
$$A_4 = \int_3^9 \left[\frac{3-x}{2} - (-\sqrt{x}) \right] dx = \int_3^9 \left(\frac{3-x}{2} + \sqrt{x} \right) dx. \text{ Una primitiva es}$$

$$r(x) = \frac{6x - x^2}{4} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} = \frac{18x - 3x^2 + 8\sqrt{x^3}}{12}. \text{ Por la regla de Barrow,}$$

$$A_4 = r(9) - r(3) = \frac{18 \cdot 9 - 3 \cdot 9^2 + 8\sqrt{9^3}}{12} - \frac{18 \cdot 3 - 3 \cdot 3^2 + 8\sqrt{3^3}}{12} = \frac{135}{12} - \frac{27 + 24\sqrt{3}}{12} = \frac{108 - 24\sqrt{3}}{12} = 9 - 2\sqrt{3}$$

Por tanto, $A = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + 2\sqrt{3} + 9 - 2\sqrt{3} = \frac{125}{12} \cong 10,42 \text{ u}^2$

8.- La gráfica de una función f es



Contesta razonadamente las siguientes preguntas

(a) ¿En qué puntos no es f continua?

Resolución

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty ; \text{ además, } \nexists f(-2) \Rightarrow f \text{ NO es continua en } x = -2.$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) ; \quad \exists \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \text{ pero son distintos } \Rightarrow f \text{ NO es continua en } x = 3.$$

(b) ¿En qué puntos no es f derivable?

Resolución

En $x = -2$, $x = 3$ no es derivable por no ser continua. Además, tampoco es derivable en $x = 2$ porque la gráfica presenta un “pico”.

(c) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f ?

Resolución

Observando la gráfica, f es decreciente en $(-\infty, -1) - \{-2\} \cup (2, +\infty)$ y creciente en $(-1, 2)$.

(d) ¿Cuáles son los máximos absolutos y relativos de f en $[-3, 4]$?

Resolución

Observando la gráfica, el máximo relativo se alcanza en $x = 2$ y el mínimo relativo en $x = -1$. No hay máximos ni mínimos absolutos porque $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$ por ser $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

9.- De una función g se sabe que es positiva y tiene derivada positiva en el intervalo $(-\infty, -2)$;

que g tiene, tanto por la derecha como por la izquierda, una asíntota vertical en $x = -2$; que el mínimo absoluto de g se alcanza en $x = 0$ y vale $g(0) = 0$ pero g no es derivable en dicho punto; que g es creciente en $[0, \infty)$ siendo continua en dicho intervalo salvo una discontinuidad de salto en $x = 3$ y que cuando $x \rightarrow \infty$ tiene una asíntota oblicua. Teniendo en cuenta los datos anteriores, esboza la gráfica de g .

Resolución

Una posible gráfica de g es:

