

CONCOURS G2E

PHYSIQUE

Durée : 3 heures 30

Les calculatrices sont autorisées.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

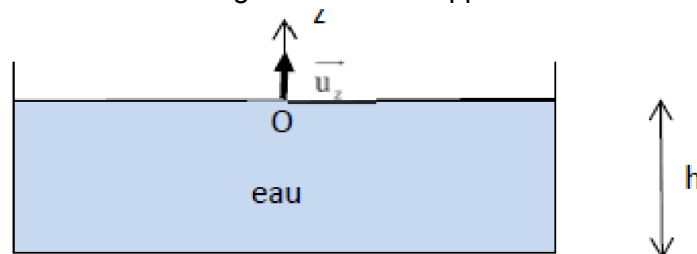
Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas ainsi qu'aux réponses aux applications numériques.

ETUDE D'UN BASSIN

Dans ce problème, on considère un bassin rempli d'eau sur une hauteur $h = 1$ m. L'eau liquide sera considérée comme un fluide incompressible de masse volumique $\rho_e = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$.

On définit pour les questions 1 à 8 un axe Oz ascendant, l'origine étant choisie au niveau de la surface de l'eau, ainsi qu'un vecteur unitaire dirigé vers le haut.

L'accélération de la pesanteur sera notée g et sa valeur supposée constante : $g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$.

**1. Loi de pression hydrostatique**

1.a. En considérant l'équilibre d'une couche d'eau de section S s'étendant entre les cotes z et $z + dz$, démontrer la loi de l'hydrostatique relative à la pression.

ρ_e étant constant, en déduire l'expression de la pression P en fonction de z . On notera P_0 la pression atmosphérique à la cote $z = 0$ où se trouve l'interface air-eau.

1.b. Quelle est la pression maximale à l'intérieur du bassin ?

2. Ordre de grandeur de la pression dans l'eau

2.a. Quelle est la valeur moyenne de la pression atmosphérique ? Donner le résultat en unités du système international.

2.b. Comparer numériquement la pression maximale dans le bassin et la pression atmosphérique.

2.c. Sur quelle profondeur faudrait-il plonger pour doubler la pression ? Le bassin serait-il assez profond ?

2.d. À combien monte la pression au fond des fosses océaniques de profondeur 10 km environ ?

3. Principe d'Archimède

Enoncer et démontrer le principe d'Archimède.

4. Remontée d'une balle de ping-pong du fond du bassin

Une balle de ping-pong de masse $m = 2,3 \text{ g}$, de rayon $r = 1,9 \text{ cm}$ que l'on considèrera comme une sphère incompressible (enveloppe en celluloïd rigide) est lâchée depuis le fond du bassin en $z = -h$ sans vitesse initiale. Elle est repérée par sa cote $z(t)$. On rappelle que l'origine des z est prise à la surface. La balle est soumise à son poids, à la poussée d'Archimède dans l'eau et à une force de frottement fluide obéissant à la loi de Stokes $\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la balle.

η est la viscosité dynamique du fluide ; elle a pour valeur $\eta = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$. La loi de Stokes suppose, pour être appliquée, un écoulement de nombre de Reynolds inférieur à 0,1.

4.a. Rappeler l'expression du nombre de Reynolds et son unité.

4.b. Calculer la valeur numérique de la vitesse maximale admissible pour cette balle qui remonte si on veut pouvoir appliquer la loi de Stokes.

4.c. Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la balle et en déduire $v_z(t)$ puis $z(t)$. On définira un temps caractéristique τ dont on donnera l'expression littérale. Exprimer la vitesse limite v_{lim} atteinte.

4.d. Calculer numériquement τ et v_{lim} .

4.e. Commenter le résultat et montrer que l'on sort des conditions de validité de la loi de Stokes.

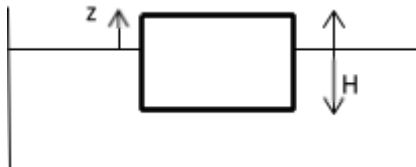
5. Oscillation de la balle de ping-pong sous l'effet d'une onde propagative

La balle de ping-pong de rayon $r = 1,9 \text{ cm}$ est maintenant mise en oscillation verticale à cause du passage d'une onde de déplacement transverse de l'eau. La vitesse de propagation des ondes a pour valeur $c = 0,2 \text{ m.s}^{-1}$. En exploitant le schéma ci-dessous, évaluer l'ordre de grandeur de la période d'oscillation de la balle ainsi que sa fréquence.



6. Oscillation d'un flotteur à la surface du bassin

Un flotteur cylindrique de masse volumique μ flotte à la surface de l'eau de masse volumique ρ_e . Le niveau supérieur du flotteur est repéré par sa cote z par rapport au niveau de la surface de l'eau.



On suppose que le diamètre D du flotteur est très grand devant sa hauteur H , de façon à éviter tout basculement. On négligera la poussée d'Archimède exercée par l'air sur la partie émergée du flotteur. On néglige aussi tout frottement dans cette question. On suppose le bassin de volume suffisamment grand pour négliger les variations du niveau de l'eau.

6.a. Exprimer la position d'équilibre z_{eq} . A quelle condition le flotteur flotte-t-il effectivement ?

6.b. Si on perturbe l'équilibre, il apparaît des oscillations du flotteur à la surface.

Ecrire l'équation différentielle du mouvement satisfaite par $z(t)$.

Exprimer la période T d'oscillation du flotteur ainsi que sa vitesse maximum $v_{\max}$ en fonction de l'amplitude a des oscillations et de la pulsation ω_0 des oscillations.

6.c. Calculer T et $v_{\max}$ pour $\mu = 500 \text{ kg.m}^{-3}$, $H = 0,1 \text{ m}$ et $a = 5 \text{ cm}$.

7. Amortissement des oscillations du flotteur

Concernant le mouvement du flotteur précédent, on prend maintenant en compte une légère force de frottement fluide modélisée par $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ où α est une constante.

7.a. On définit $Z = z - z_{\text{eq}}$. Etablir l'équation différentielle du mouvement satisfaite par $Z(t)$.

7.b. L'équation ayant la forme canonique : $\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$,

on admet sa solution : $Z(t) = Z_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cos(\omega_p t + \varphi)$ avec $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

Si le facteur de qualité $Q \gg 1$ alors $\omega_p \approx \omega_0$, cas dans lequel nous nous plaçons.

Identifier les constantes ω_0 et Q et préciser leurs unités.

7.c. Au bout de trois oscillations, on constate que les oscillations du flotteur ont disparu. Quel est l'ordre de grandeur du facteur de qualité ?

8. Remontée d'une bulle d'air

Une bulle d'air, considérée comme un volume sphérique de gaz parfait de volume initial V_0 , se forme sans vitesse initiale au fond du bassin de profondeur $h = 1 \text{ m}$. On admet que, au cours de sa remontée dans le fluide supposé parfait et incompressible, la pression dans la bulle est égale à la pression qui règne dans l'eau à l'altitude à laquelle elle se trouve. On suppose une évolution adiabatique réversible de l'air de la bulle. On suppose également que la température de l'eau et de la bulle au moment de sa création est $T_0 = 15^\circ\text{C}$. On prend le rapport des capacités calorifiques à

pression et volume constants $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$.

8.a. En utilisant la loi de Laplace en variables P et V et la loi $P(z)$ de l'hydrostatique dans l'eau, établie à la question 1, établir l'expression du volume $V(z)$ de la bulle. À l'arrivée à la surface, la variation de volume de la bulle est-elle notable ?

8.b. En utilisant loi de Laplace en variables P et T et la loi $P(z)$, établir l'expression de sa température $T(z)$. A l'arrivée à la surface, la variation de température est-elle notable ?

9. Dioxygène dissous dans l'eau. Analyse de document

Sur un document internet on trouve les informations suivantes relatives à la solubilité en mg.L^{-1} du dioxygène à l'équilibre sous la pression atmosphérique :

14,6 mg.L^{-1} (eau à 0°C), 12,75 mg.L^{-1} (eau à 5°C), 10,07 mg.L^{-1} (eau à 15°C),

8,28 mg.L^{-1} (eau à 25°C), 4,59 mg.L^{-1} (eau à 60°C).

Sur un document différent, on trouve une autre information : la solubilité molaire du dioxygène dans l'eau est soumise à la loi de Henry, à savoir qu'elle est proportionnelle à la pression partielle du gaz dans l'atmosphère en équilibre au-dessus, la constante de proportionnalité étant l'inverse de la constante de Henry notée H . Ainsi :

$$c_{O_2} = \frac{P_{O_2}}{H} \text{ avec } H=769,23 \text{ L.atm.mol}^{-1} \text{ à } 298,15\text{K}$$

c_{O_2} est la concentration du gaz en solution en mol.L⁻¹

P_{O_2} est la pression du gaz mesurée en atmosphère (atm).

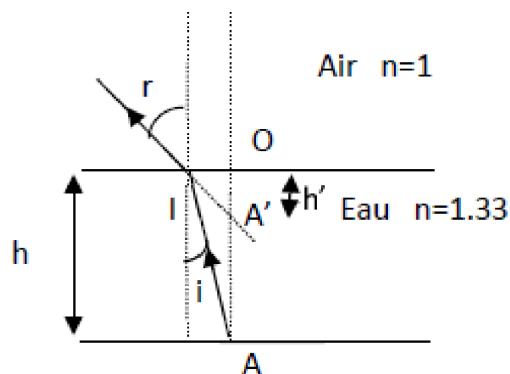
On rappelle que 1atmosphère = 1,013.10⁵ Pa

- 9.a. Vérifier que à 25°C les données sur la loi de Henry sont compatibles avec la solubilité massique de O₂ du premier document. On rappelle que l'air contient 20% de dioxygène et 80% de diazote. On donne la masse molaire de l'oxygène : M(O) = 16 g.mol⁻¹.
- 9.b. À 15°C et 1 atm, quel volume de dioxygène est dissous dans 1 litre d'eau ? À quel volume d'air cela correspondrait-il ?

10. Vue du fond du bassin

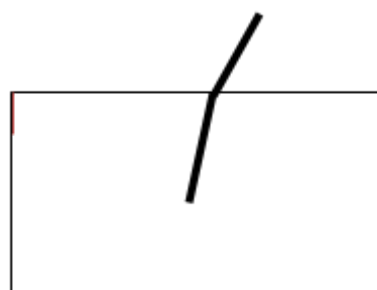
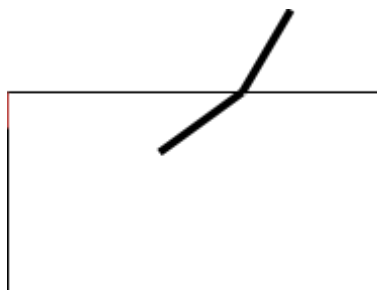
Le fond du bassin se trouve à une profondeur h . À quelle profondeur $h' = |OA'|$ un observateur à l'aplomb du bassin, voit-il le fond ? Utiliser le schéma ci-dessous pour répondre à cette question. L'eau est un milieu d'indice $n_e = 1,33$.

On considère les angles petits de sorte que sinus, tangente et angle en radians puissent être confondus. On prendra l'indice de l'air $n = 1$.



11. Résolution de problème : bâton dans l'eau

Un bâton incliné par rapport à la verticale est partiellement immergé, il paraît cassé. Lequel des deux schémas correspond à la réalité expérimentale ? Reproduire le schéma correct sur la copie en y ajoutant un tracé de rayons lumineux issus d'un point immergé du bâton qui justifie le choix effectué.



12. Eclairage du bassin

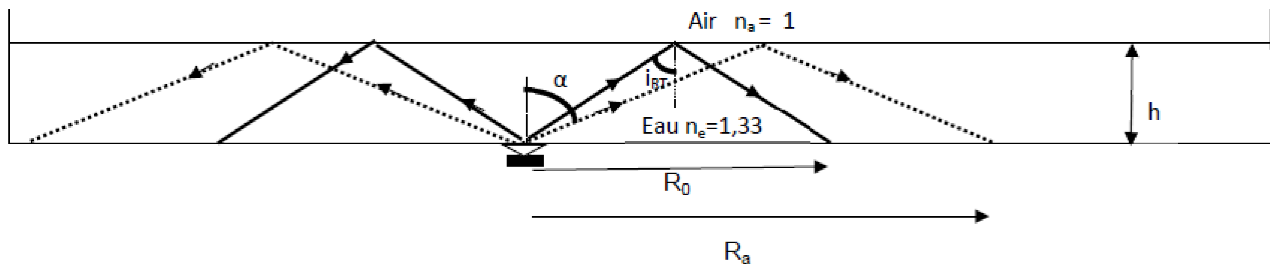
Une lampe étanche est posée au fond du bassin de hauteur h et éclaire vers le haut avec un angle d'ouverture totale 2α de 120° . On constate que l'éclairage du fond du bassin correspond à un disque et une auréole adjacente et concentrique, tous deux lumineux.

12.a. Quel est le rayon R_0 du disque ? L'exprimer en fonction de n_e et de h uniquement.

12.b. Laquelle de ces deux structures est la plus lumineuse ?

12.c. Quel est le rayon externe R_a de l'auréole ?

On tient compte du phénomène de réflexion totale du rayon issu de la lampe vers l'interface eau-air. i_{RT} est l'angle limite de réflexion totale pour un rayon lumineux se propageant de l'eau vers l'air.

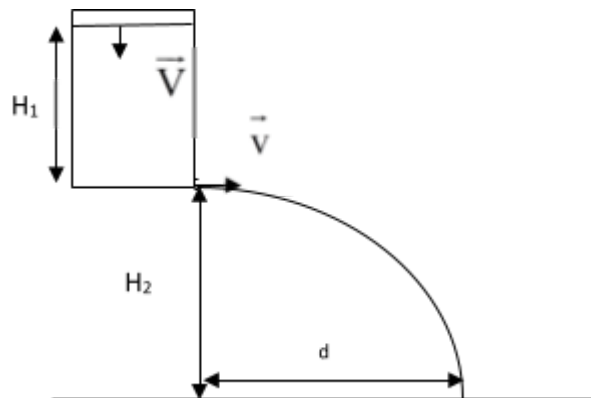


13. Éjection de l'eau par une fontaine, portée du jet de la fontaine

Une fontaine réservoir éjecte l'eau avec une vitesse initiale horizontale grâce à un trou de surface s percé au fond d'un récipient cylindrique de surface S rempli sur une hauteur H_1 . $H_1(t)$ est donc le niveau d'eau de la fontaine par rapport à son fond.

13.a. On note $V = -dH_1/dt$ la vitesse de l'interface eau-air orientée positivement vers le bas. En supposant le fluide parfait incompressible et en écoulement quasi-permanent, exprimer la vitesse v d'éjection de l'eau en fonction de ρ , g , S , s et H_1 .

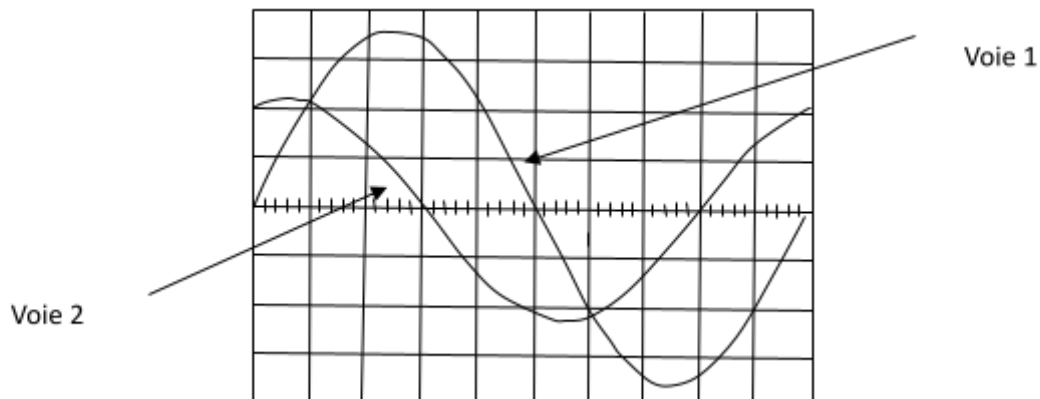
13.b. Simplifier l'expression précédente si on suppose $S \gg s$. Utiliser ce résultat dans la question suivante.



13.c. L'orifice d'éjection horizontale de la fontaine est placé à une hauteur H_2 au-dessus de la surface de l'eau du bassin. On néglige tout frottement. Exprimer la distance horizontale d de l'orifice de la fontaine au point où le jet d'eau rencontre la surface de l'eau du bassin, en fonction de H_1 et H_2 .

14. Pompe de la fontaine

- 14.a. La pompe qui remplit la fontaine réservoir au niveau H_1 est alimentée par une tension sinusoïdale $U = U_{\max} \cos(\omega t)$ et peut être considérée comme un petit moteur électrique. Ce moteur est équivalent à l'association série d'une bobine d'auto-inductance L et d'une résistance R . Le courant dans le circuit est alors, en régime permanent sinusoïdal et en convention récepteur de la forme $I = I_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$. On travaillera bien sûr en représentation complexe. Exprimer $I_{\max}$ ainsi que $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ en fonction de $U_{\max}$, R , L et ω .
- 14.b. L'oscillogramme suivant correspond pour la voie 1 à la tension aux bornes d'une résistance r en série avec le moteur et pour la voie 2 à la tension aux bornes du moteur. Mesurer le déphasage de la voie 2 par rapport à la voie 1. Justifier le retard de la voie 1 par rapport à celui de la voie 2.



15. Moteur thermique pour alimenter un groupe électrogène

Lorsqu'il y a une coupure de la distribution du courant, un petit moteur thermique alimente un alternateur constituant ainsi un groupe électrogène. Nous nous intéressons au seul moteur thermique dont nous modélisons le fonctionnement par un cycle moteur de Carnot sur gaz parfait.

On note T_F et T_C les températures respectives des sources froide et chaude.

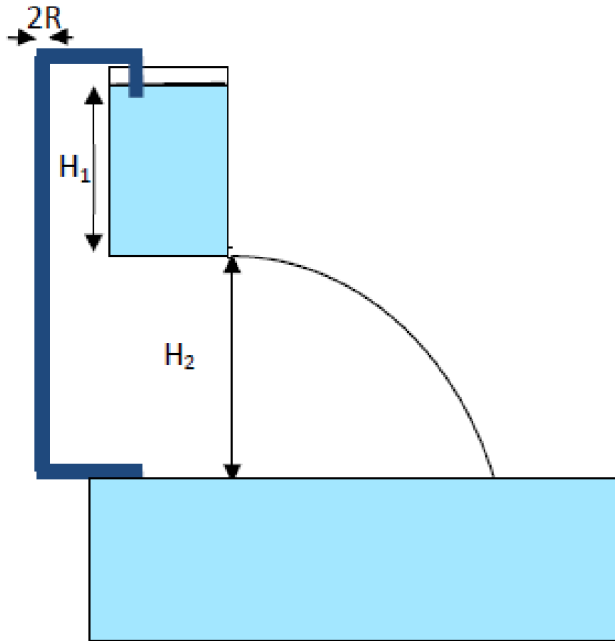
- 15.a. Représenter ce cycle en diagramme P,V (Pression en fonction du Volume) et en diagramme T,S (Température en fonction de l'entropie S).
- 15.b. Expliquer pourquoi les isentropiques sont plus pentues que les isothermes. Pour cela, comparer les équations des isothermes et des adiabatiques dans le diagramme P en fonction de V .

- 15.c. Quelle est la signification de $\int_{\text{cycle}} -PdV$ et de $\int_{\text{cycle}} TdS$? Préciser le signe de ces deux grandeurs dans le cas du cycle moteur de Carnot.
- 15.d. Exprimer, sans démonstration, le rendement du moteur en énonçant le théorème de Carnot. Comparer le rendement d'un moteur réel au rendement de Carnot.

16. Puissance nécessaire pour élever l'eau

L'eau, encore considérée comme un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ_e dans cette question, est prélevée par la pompe dans le bassin à une hauteur $H_1 + H_2$ plus bas sous la surface libre du réservoir de la fontaine à travers un tuyau cylindrique de rayon R considéré comme entièrement vertical. Le débit volumique est noté D_v .

- 16.a. Exprimer la vitesse du fluide que l'on considère uniforme dans le tuyau en fonction du débit et du rayon du tuyau.
- 16.b. Exprimer la masse d'eau totale dans le tuyau. Exprimer la hauteur parcourue par chaque particule d'eau de vitesse v pendant une durée Δt puis la variation d'énergie potentielle ΔE_p de l'ensemble des particules contenues dans le tuyau.
- 16.c. En déduire la puissance du moteur qui alimente la pompe.



17. Caractère visqueux du fluide

En tenant compte de la viscosité dynamique η du fluide, on montre que, en régime permanent, la vitesse dans un tuyau cylindrique horizontal de rayon R , s'écrit :

$$v(r) = \frac{R^2}{4\eta} \frac{\Delta P}{L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

r est la distance à l'axe du cylindre, ΔP est la différence de pression ou pression motrice maintenue aux bords du tuyau de longueur L .

- 17.a. Par intégration du profil de vitesse sur une section circulaire, exprimer le débit volumique D_v de l'eau qui s'écoule dans le tuyau (loi de Poiseuille). En déduire la résistance hydraulique du tuyau définie, grâce à une analogie électrique, par $R_H = \Delta P/D_v$
- 17.b. Quelle est la puissance linéique développée par la pompe nécessaire pour entretenir ce débit ?
Raisonner en termes mécaniques ou par analogie électrique avec la puissance dissipée par effet Joule.

$$\frac{R}{\sqrt{2}}$$

17.c. On considère maintenant que le fluide est acheminé par deux tuyaux de rayon $\frac{R}{\sqrt{2}}$, la surface de la section de l'ensemble de ces deux tuyaux est donc égale à la surface de la section d'un gros tuyau de rayon R. Que devient alors le débit acheminé par ces deux petits tuyaux sous la même pression motrice ΔP ?

N.B. pour les questions 18 et 19 suivantes, l'origine est prise à la surface libre de l'eau et l'axe des z est descendant.

18. Refroidissement de l'eau du bassin

18.a. On note λ_e La conductivité thermique de l'eau. Rappeler la forme de la loi de Fourier et déterminer l'unité de λ_e .

18.b. L'équation aux dérivées partielles qui décrit un régime transitoire unidimensionnel est

$\rho_e c_e \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_e \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ où ρ_e la masse volumique de l'eau et c_e la capacité thermique massique de l'eau. Compte tenu de la profondeur h du bassin, mettre en évidence par une analyse dimensionnelle un temps caractéristique en fonction de h, ρ_e , λ_e et c_e . Pour l'application numérique prendre h = 1 m.

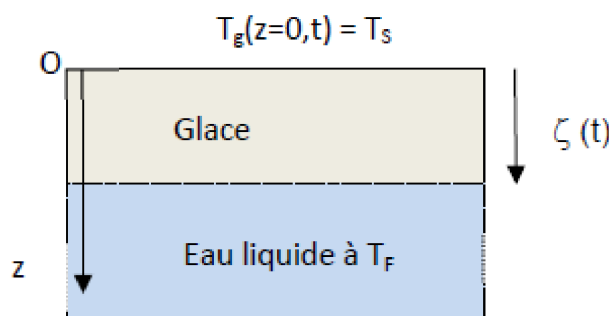
On donne $c_e = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$; $\lambda_e = 0,6 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $\rho_e = 1000.\text{kg.m}^{-3}$.

18.c. Commenter la valeur numérique obtenue.

19. Gel de la surface de l'eau du bassin

On s'intéresse ici à la croissance en fonction du temps de la couche de glace à la surface du bassin. On note $T_g(z,t)$ la température dans la couche de glace en croissance.

On note L_f l'enthalpie massique de fusion de la glace, ρ_g la masse volumique de la glace, λ_g la conductivité thermique de la glace et $\zeta(t)$ l'épaisseur de glace formée à la surface du bassin à l'instant t. A partir de l'instant initial, la surface du bassin est portée à la température $T_s = 243 \text{ K}$. Le bassin étant initialement et uniformément à la température $T_F = 273 \text{ K}$, il est entièrement liquide. A $t > 0$ lorsque la couche de glace croît, l'eau du bassin qui est restée liquide reste uniformément à la température $T_F = 273 \text{ K}$. On a en $z = \zeta(t)$, $T_g(\zeta(t), t) = T_F$.



L'équation qui décrit le phénomène est :

$$\rho_g L_f \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \lambda_g \frac{\partial^2 T_g}{\partial z^2}(\zeta(t), t)$$

$\frac{\partial T_g}{\partial z}(\zeta(t), t)$ signifie dérivée prise en la position $\zeta(t)$ à l'instant t.

19.a. Interpréter cette équation. On rappelle que la solidification est un processus exothermique.

$$T_g(z,t) = T_s + \frac{z}{\zeta(t)}(T_F - T_s)$$

19.b. On écrit pour la suite :

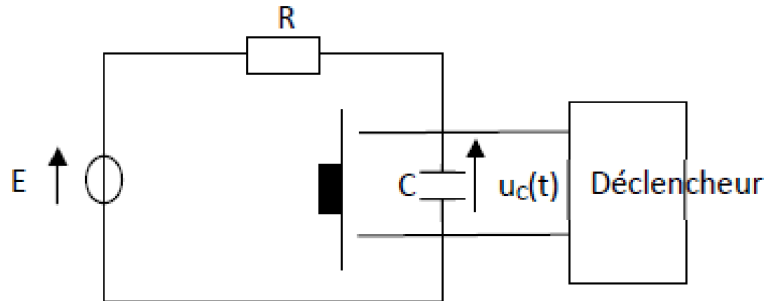
Qu'est-ce qui justifie cette écriture ? $\zeta(t)$

19.c. Intégrer l'équation différentielle qui en résulte et obtenir $\zeta(t)$.

19.d. Calculer le temps au bout duquel la couche de glace a atteint une épaisseur de 10 cm.

On donne $L_f = 0,333.10^6 \text{ J.kg}^{-1}$; $\rho_g = 915 \text{ kg.m}^{-3}$; $\lambda_g = 2,215 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

20. Minuteur du distributeur de granulés pour poissons



Le déclencheur est un montage électronique qui actionne le distributeur lorsque la tension à ses bornes est comprise entre 0 et $E/2$. Le bouton poussoir qui décharge le condensateur permet d'initialiser la distribution des granulés. Exprimer la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur et en déduire la durée t_{dist} de la distribution.