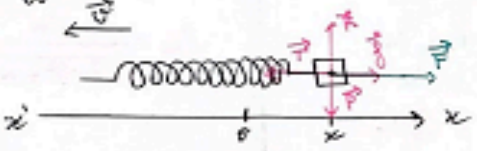
Oscillations mécaniques forcées

S-11-P

exercice 6:

1/ a/ le régime permanent des oscillations : oscillations mécaniques forcées.
En effet, le solide oscille sinusoïdalement avec une fréquence $N = N_e$

b/



•) Le théorème du centre d'inertie :
$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

•) projection sur (x'x) :
$ax + T + f + F = m \cdot a$
$\Rightarrow -kx - h \cdot v + F = m \cdot a$
$\Rightarrow F(t) = m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + h \frac{dx}{dt}$

2) a) Système : { solide, ressort }

$E_m = E_c + E_{pe}$
$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x^2$

b) $\frac{dE_m}{dt} = m \frac{dv}{dt} v + K \frac{dx}{dt} x$
$= v \left(m \frac{d^2x}{dt^2} + Kx \right)$
$= v \left(F(t) - hv \right)$ d'après l'équation différentielle.
$= v \left(F(t) + f(t) \right)$

$\frac{dE}{dt} = \frac{dx}{dt} \left(F(t) + f(t) \right)$

pour les faibles durées : $dE = dx \left(F(t) + f(t) \right)$
$= F(t) \cdot dx + f(t) \cdot dx$

$F(t)\, dx = dE - f(t) \cdot dx$
$W(\vec{F}) = dE + |W(\vec{f})|$ car $(W(\vec{f}))$ est négatif

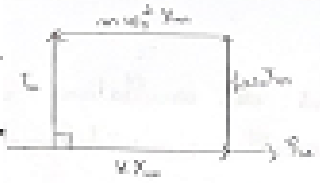
Excitateur —E fournie, $W(\vec{F})$→ Oscillateur —E dissipée→ Milieu extérieur

⚠ Au cours des oscillations l'excitateur fournit de l'énergie au résonateur pour restituer l'énergie perdue et maintenir les oscillations.

3)

	Amplitude	phase
Kx_c	$K X_m$	φ_x
$h\frac{dx}{dt}$	$h\omega X_m$	$\varphi_x + \frac{\pi}{2}$
$m\frac{d^2x}{dt^2}$	$m\omega^2 X_m$	$\varphi_x + \pi$
$F(t)$	F_m	$\varphi_F = 0$

$N = N_0$

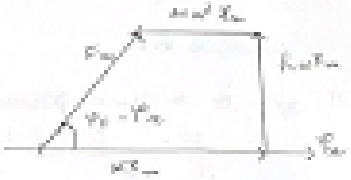


$F_m = R\omega_0 X_m$

$= R V_m$

$V_m = \frac{F_m}{R}$

$N_0 < N_0$



$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{(R\omega)^2 + (K - m\omega^2)^2}}$

4) a) La résonance de vitesse s'obtient pour :

$(N_1)_R = N_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$

La résonance d'élongation s'obtient pour :

$(N_2)_R = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m} - \frac{R^2}{2m^2}} < (N_1)_V$

$\begin{cases} (N_0)_R < (N_1)_V \\ N_2 < N_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (N_1)_V = N_1 = 1,592 \text{ Hz} \\ (N_2)_R = N_2 = 1,245 \text{ Hz} \end{cases}$

b) $V_{m_0} = \omega_0 X_m$

$= 2\pi N_0 X_m$

$= 0,6 \text{ m.s}^{-1}$

$N_0^2 = \frac{K}{4\pi^2 m}$

$\Rightarrow K = N_0^2 4\pi^2 m = 40 \text{ N.m}^{-1}$

b) $4(N_2)_R^2 = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{K}{m} - \frac{R^2}{2m^2}\right)$

$N_2^2 = N_1^2 - \frac{R^2}{8\pi^2 m^2}$

$R^2 = (N_1^2 - N_2^2)\, 8\pi^2 m^2$

$R = 2\sqrt{2}\,\pi m\sqrt{N_1^2 - N_2^2}$

$= 5,4 \text{ Kg.s}^{-1}$

c) $F_m = R \cdot V_{m_0}$

$= 2,04 \text{ N}$

5)

	h augmente
$N_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$	constante
$N_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m} - \frac{R^2}{2m^2}}$	diminue
$X_{m_2} = \frac{F_m}{R \cdot 2\pi N_2}$	diminue
$X_{m_2} = \frac{F_m}{\sqrt{(R\omega)^2 + (K - m\omega^2)^2}}$	diminue

exercice 4 :

1) $m\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{dt} + Kx = F(t)$

2) a)

	mécanique	électrique
éléments d'analogie	R m K x V F	R L $\frac{1}{C}$ q I u
Résonance d'intensité / vitesse	$N = N_0$ F et v sont en phase. $f = -Rv$ $\Rightarrow$ f et v sont en opposition de phase D'où F et f sont en opposition de phase	$N = N_0$ u et i sont en phase.

Graphiquement : (4) et (2) sont en opposition de phase.
Celles représentant $T(t)$ et $x(t)$

Alors (1) et (3) représentent $F(t)$ et $f(t)$.
et puisqu'ils sont en opposition de phase, l'oscillateur mécanique est en état de résonance de vitesse.

b) 2) $T_m = K X_m \Rightarrow K = \frac{T_m}{X_m} = \frac{2,65}{26,5\times10^{-2}} = 10\ N.m^{-1}$

•) $N = N_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$

graph $T_0 = 4\ s \Rightarrow N_0 = 1\ Hz$

$\Rightarrow K = N_0^2\ 4\pi^2 . m$

$\Rightarrow m = \frac{K}{N_0^2\ 4\pi^2} = 0,25\ Kg$

•) $f_m = R V_m \Rightarrow R = \frac{f_m}{V_m} = \frac{f_m}{\omega_0 X_m} = \frac{2}{2\pi \times 0,265} = 1,2\ Kg.s^{-1}$

Exo 1 :

1/



a/ 1ère méth :

- x(t) est en retard par rapport à F(t)
- graph : (a) est en retard par rapport à (b) donc : (a) ⟶ x(t)
  (b) ⟶ F(t)

2ème méth :

$F(t) = F_m \cdot \sin \omega t$

à $t \to 0^+$ $\begin{cases} F(0) = 0 \\ \left(\frac{dF}{dt}\right)_0 > 0 \end{cases}$

⇒ graph : à $t \to 0$ la courbe (b) est nulle et croissante.

⇒ F(t) ⟶ (b)
x(t) ⟶ (a)

b/ graph : - $X_m = 0,05\ m$
- $F_m = 4\ N$
- $N = \frac{1}{T}$

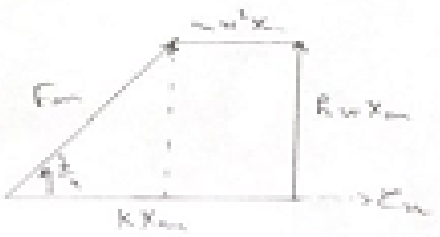
avec : $T = \frac{0,6\pi}{5}$ s

$\Rightarrow N = \frac{5}{0,6\pi} = 1,70\ Hz$

c/ $\Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_x = \frac{\pi}{2} \cdot \Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$ rad

2/ Eq. dif (voir cours)

3/ $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$



b/ $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{R \omega X_m}{F_m}$

$\Rightarrow R = \frac{F_m}{2\pi N X_m} \cdot \sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{20}{20\pi \times 0,05} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{5\sqrt{2}}{5\pi \times 0,05}$

$= 4,52\ kg \cdot s^{-1}$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{(K - m\omega^2)X_m}{F_m}$

$m\omega^2 = K - \frac{F_m}{X_m} \cdot \cos\frac{\pi}{4}$

$m = \frac{1}{\omega^2}\left(K - \frac{F_m}{X_m}\cos\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{4\pi^2 \times 1,70^2}(20 - 40\sqrt{2})$

$= 0,09\ kg$

c/ $F_m^2 = (R\omega X_m)^2 + [(K - m\omega^2)X_m]^2$

$X_m^2 = \frac{F_m^2}{(R\omega)^2 + (K - m\omega^2)^2}$

$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{(R\omega)^2 + (K - m\omega^2)^2}}$

d/ Les éléments d'analogie :

O. M	O. E
R_m	R
m	L
k	$\frac{1}{C}$
x	q
v	i
F	u

- $\Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_x = \frac{\pi}{2}$ rad

Idem pour un oscillateur électrique

$\varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2} = \varphi_u - (0 - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

$\varphi_u = 0$

c'est la résonance d'intensité idem que pour O.M

c'est la résonance de vitesse

b/ La vitesse d'intensité s'obtient pour $N = N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ alors pour l'oscillation mécanique.

La résonance de vitesse s'obtient pour $N = N_0 = N_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{25}{0,05\pi^2}}$

$= 2,5\ Hz$

c/ $X_{m_2} = \frac{F_m}{\sqrt{(k_2 - 2\pi N)^2 + (k - m4\pi^2 N^2)^2}}$

$= 3,073\ m$

b/ $T = -km \Rightarrow T_m = k X_m$

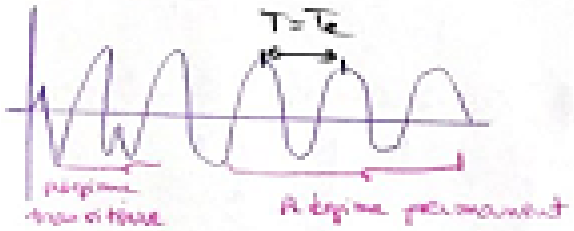
$\Rightarrow T_{m_2} = k \cdot X_{m_2} = 1,37\ N > T_{maximum}$

En 4 :

a/ Régime : Ce sont des oscillations mécaniques et forcées

b/ Voir cours

Allure exigée :



a/ $E = E_c + E_p$

$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2$

b/ $\frac{dE}{dt} = m v \cdot \frac{dv}{dt} + k x \cdot \frac{dx}{dt}$

$= v \left[m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + kx \right]$

$= v \left[F(t) - k \cdot x(t) \right]$

$\frac{dE}{dt} = v \left[F(t) + f(t) \right]$

$\frac{dE}{dt} = \frac{dx}{dt} \left(F(t) + f(t) \right)$

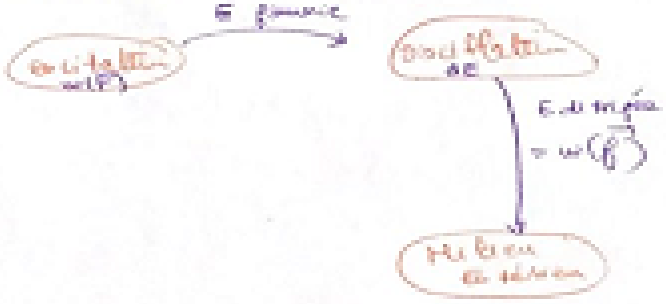
Pour les faibles durées :

$dE = dx \left(F(t) + f(t) \right)$

$= F(t) dx + f(t) dx$

$F(t) \cdot dx = dE - f(t) dx$

$w(\vec{F}) = dE + w(\vec{f})$



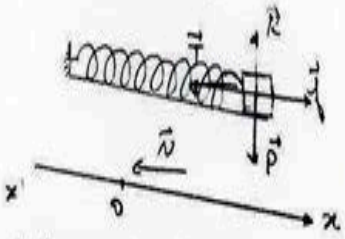
Exercice 2 : Correction

$k = 25\ N.m^{-1}$

$m = ?$

$\vec{f} = -h\vec{v}$ $\quad h = 1,4\ kg.s^{-1}$

$F(t) = 1,1 \sin(8\pi N t)$



Appliquons le R.F.D sur le solide (S)

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} + \vec{F} = m.\vec{a}$$

Projection sur (xx') :

$$0 + 0 + T + f + F = m.a$$

$$-kx - hv + F = m.a$$

$$m.a + hv + kx = F(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$

On pose $\tau = \frac{m}{h}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

$F(t) = F_m \sin(2\pi N t)$

$x(t) = X_m \sin(2\pi N t + \varphi_x)$

La fréquence des oscillations est égale à celle de l'excitateur ⇒ oscillations forcées

3) a) $F(t) = F_m \sin(8\pi N t)$

à $t = 0$ $\begin{cases} F(0) = 0 \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = F_m 8\pi N \cos 0 > 0 \end{cases}$ courbe croissante

c'est la courbe (1) qui représente $F(t)$

Courbe (2) ⟶ $f(t)$

$N_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,8} = 1,25\ Hz$ $\qquad f_m = 1,1\ N$

$x = X_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$v = \frac{dx}{dt} = \omega X_m \sin(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2})$

$f = -h.v$

$= -h\omega X_m \sin(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2})$

$f = h\omega X_m \sin(\omega t + \varphi_x - \frac{\pi}{2})$

à $t = 0$ $\begin{cases} f(0) = f_m \sin(\varphi_f) = 0 \\ \frac{df}{dt} = \omega f_m \cos\varphi_f < 0 \end{cases}$

donc $\varphi_x = \varphi_f + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

$f_m = h\omega X_m \Rightarrow X_m = \frac{f_m}{h\omega}$

$X_m = 0,1\ m$

Graph $F = -f$

$m.a + hv + kx = F(t)$

$m.a + f + kx = F$

$F = -f$

$\varphi_F = \varphi_f + \pi$

$= \varphi_x - \frac{\pi}{2} + \pi$

$\varphi_F = \varphi_v - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \pi$

$F(t)$ et $v(t)$ sont en phases

⇒ c'est la résonance de vitesse

Exercice 7:

$N_1 = \frac{1}{T_1} = 1\,Hz$; $X_m = 7{,}8\,cm$

à $t=0$ $x_0 = X_m \sin(\varphi_x)$

$\Rightarrow \sin(\varphi_x) = -\frac{3{,}9}{7{,}8} = -\frac{1}{2}$

à $t=0$ $x(t)$ est croissante $\cos\varphi_x > 0$

$\Rightarrow \varphi_x = -\frac{\pi}{6}\,rad$

$\vec{V_1}$	$\vec{V_2}$	$\vec{V_3}$	N
$h\frac{dx}{dt}$	$F(t)$	y	
hwX_m	F_m	$KX_m - mw^2X_m$	
φ_1	φ_F	φ_x	

b) $T_m = f X_m$

T_m est max. si X_m est max qui se obtient pour $N = N_{rx} < N_0$

$f = h V_m$ f est max si V_m est max qui s'obtient pour $N = N_{rv} = N_0$.

Graph:

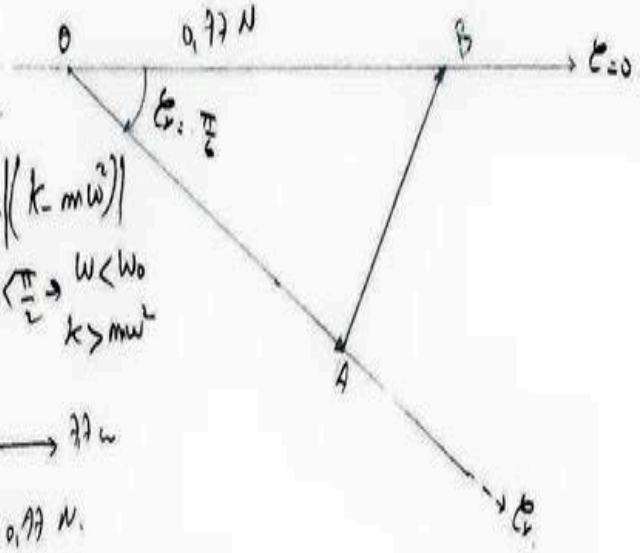
$N_{rC_1} < N_{rC_2}$

$C_1 \longrightarrow T_m = f(N)$

$C_2 \rightarrow f_m = f(N)$.

$T_{mr} = KX_{mr} = \frac{kF_m}{\sqrt{(hw_r)^2 + (k - mw_r^2)^2}}$

a) $1\,N \longrightarrow 1\,cm$



$\|\vec{OA}\| \longrightarrow X_m \left| (k - mw^2) \right|$

or $\varphi_F - \varphi_V = \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow w < w_0$

$k > mw^2$

$F_m \longrightarrow 7{,}7\,cm$

$F_m = 0{,}77\,N$.

$hwX_m \longrightarrow 3{,}8\,cm$.

$h = \frac{3{,}8 \times 0{,}1}{w X_m} = 0{,}0485\,kg\,s^{-1}$

$m = 0{,}089\,kg$

$\Rightarrow m = 89{,}6830\,kg.g$

$N = 1{,}96\,Hz = N_0$ Résonance de v. test

$V_m = \frac{F_m}{h} \Rightarrow X_m = \frac{V_m}{w_0} = \dots$

$\varphi_x = \varphi_V - \frac{\pi}{2} = \varphi_F - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\,rad.$

Exercice 8 :

2) $x \longmapsto q$

$v \longrightarrow i$

$F \longrightarrow u$

- A la résonance d'intensité
- $N_2 N_0$
- $u(t)$ et $i(t)$ sont en opposition de phases

Par analogie à la résonance de vitesse

$F(t)$ et $v(t)$ sont en phases

or $f = -hv$

$\Rightarrow f(t)$ et $v(t)$ sont en opposition de phase alors $F(t)$ et $f(t)$ sont en opposition de phases

(b) $\longrightarrow x(t)$

or $T = -kx$ T est en opposition de phase / à $x(t)$

c'est la courbe (2).

1 et 2 représentent $F(t)$ et $f(t)$.

Graph: (1) et (3) sont en opposition de phase alors $F(t)$ et $f(t)$ sont....

L'oscillateur mécanique est en état de résonance de vitesse.

$$T_m = k X_m \Rightarrow k = \frac{T_m}{X_m} = \frac{9,65}{0,65}$$

$$= 10 N m^{-1}$$

$$T = T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad m = \frac{T_0^2 \cdot k}{4\pi^2}$$

$$= \frac{1 \times 10}{4\pi^2} = 0,25 \text{ kg}$$

$$f_m = h \cdot v_m \Leftrightarrow \qquad h = \frac{f_m}{\omega_0 \cdot X_m}$$

$$= h \omega_0 X_m \qquad = \frac{2}{2\pi \times 0,25}$$

$$= 1,27 \text{ kg}^{-1}$$

3) Pour ω_2 X_m est max

c'est la résonance d'élongation.

b) Pour $h < h_c$ ω_2 existe

Pour $h > h_c$ ω_2 n'existe pas de résonance d'élongation.

h_c : la valeur du coeff du frottement à partir duquelle il n'y a pas de résonance d'élongation.

c) $\omega_2^2 = \frac{1}{2m^2}\left(h_c^2 - f_h^2\right)$

$= \frac{k}{m} - \frac{h^2}{2m^2}$

$= \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$

$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{2m}} < \omega_0$

$\omega_2 < \omega_0 \Rightarrow \omega_2^2 < \frac{k}{m}$

$\Rightarrow m\omega_2^2 X_m < k X_m$

$\Rightarrow$ figure (b)

X_m ? pythagore

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{(h\omega_2)^2 + (k - m\omega_2^2)^2}}$$