

Taller de práctica

Cinemática y dinámica con aplicación de integrales

Olimpiadas para aplicaciones de las matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Documento de trabajo para estudiantes participantes

Objetivo: Fortalecer la modelación matemática y la interpretación física en problemas de cinemática y dinámica, con especial énfasis en el uso de la integración para obtener velocidad, posición, trabajo y relaciones entre variables.

La idea es que justifique cada procedimiento, identifique la variable de integración apropiada, verifique unidades y, cuando sea pertinente, interprete físicamente el resultado obtenido.

Enunciados

Problema 1. Aceleración variable en el tiempo

Una partícula se mueve en línea recta con aceleración $a(t)=6t-4$, para $t \geq 0$.

Si en $t=0$ su velocidad es $v(0)=3$ m/s y su posición es $x(0)=2$ m:

- a) Determine la función velocidad $v(t)$.
- b) Determine la función posición $x(t)$.
- c) Halle el desplazamiento entre $t=1$ s y $t=4$ s.
- d) Encuentre los instantes en los que la partícula cambia de sentido.

Problema 2. Movimiento con aceleración exponencial

La aceleración de un móvil viene dada por $a(t)=5e^{-2t}$, con condiciones iniciales $v(0)=1$ m/s y $x(0)=0$.

- a) Encuentre $v(t)$.
- b) Encuentre $x(t)$.
- c) Determine la velocidad límite cuando $t \rightarrow \infty$.
- d) Interprete físicamente el resultado.

Problema 3. Aceleración definida por tramos

Un objeto se mueve sobre una recta con aceleración

$$a(t)=2t \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2,$$

$$a(t)=4 \quad \text{para } 2 < t \leq 5.$$

Si parte del reposo desde el origen:

- a) Halle $v(t)$ en cada tramo.
- b) Halle $x(t)$ en cada tramo.
- c) Calcule la distancia total recorrida en los primeros 5 s.

Problema 4. Desplazamiento y distancia a partir de la velocidad

La velocidad de un móvil está dada por $v(t)=t^2-4t+3$, para $0 \leq t \leq 5$.

- a) Determine la posición $x(t)$ si $x(0)=1$.
- b) Calcule el desplazamiento total entre 0 y 5 s.
- c) Calcule la distancia total recorrida en ese intervalo.
- d) Explique por qué desplazamiento y distancia no coinciden necesariamente.

Problema 5. Fuerza variable en función de la posición

Sobre una partícula actúa una fuerza $F(x)=3x^2+2x$ a lo largo del eje x , desde $x=1$ m hasta $x=4$ m.

- a) Calcule el trabajo realizado por la fuerza.

- b) Si la masa es 1.5 kg y la partícula parte con rapidez 2 m/s en $x=1$, determine su rapidez en $x=4$.
- c) Identifique el principio físico usado.

Problema 6. Caída vertical con resistencia lineal

Una esfera cae verticalmente bajo gravedad y una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad.

Tomando positivo hacia abajo:

$$m \, dv/dt = mg - kv,$$

con $m=1$ kg, $g=9.8$ m/s², $k=2$ kg/s y $v(0)=0$.

- a) Resuelva para $v(t)$.
- b) Determine la velocidad terminal.
- c) Halle la posición $y(t)$ si $y(0)=0$.
- d) Determine cuánto tiempo tarda en alcanzar el 90% de la velocidad terminal.

Problema 7. Aceleración dependiente de la posición

Una partícula se mueve en una dimensión y su aceleración depende de la posición:

$$a(x)=2x+1.$$

Sabiendo que en $x=0$ la velocidad es $v=3$ m/s:

- a) Use la relación $a=v(dv/dx)$ para encontrar $v(x)$.
- b) Determine la rapidez cuando $x=5$.
- c) Explique por qué aquí conviene integrar respecto a x y no respecto a t .

Problema 8. Potencia constante

Un motor entrega potencia constante P a un vehículo de masa m , sin rozamiento. Se sabe que $P=Fv$ y que el vehículo parte del reposo.

- a) Demuestre que la velocidad satisface la ecuación diferencial $m \, dv/dt = P/v$.
- b) Resuelva para $v(t)$.
- c) Determine $x(t)$.
- d) Analice el comportamiento de la aceleración conforme pasa el tiempo.

Problema 9. Movimiento armónico desde la aceleración

Una partícula se mueve en línea recta y su aceleración satisface

$$a(x)=-\omega^2 x.$$

- a) Usando integración, obtenga una relación entre v y x .
- b) Si en $x=A$ la velocidad es cero, encuentre $v(x)$.
- c) Interprete físicamente el significado del parámetro A .
- d) Relacione el resultado con conservación de energía.

Problema 10. Trabajo para comprimir un resorte no ideal

La fuerza necesaria para comprimir un resorte no ideal una distancia x viene dada por $F(x)=kx+\lambda x^3$, donde k y λ son constantes positivas.

- a) Encuentre el trabajo necesario para comprimir el resorte desde $x=0$ hasta $x=a$.
- b) Si $k=100 \text{ N/m}$, $\lambda=50 \text{ N/m}^3$ y $a=0.20 \text{ m}$, calcule el trabajo numérico.
- c) Compare con el caso de un resorte ideal.