

Câu 48: [2D2-3.2-4] (THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội năm 2017-2018) Cho các số $a, b > 1$ thỏa mãn $\log_2 a + \log_3 b = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b}$ bằng:

A. $\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}$.

B. $\sqrt{\log_3 2} + \sqrt{\log_2 3}$.

C. $\frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_3 2)$.

D. $\frac{2}{\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}}$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $x = \log_2 a$; $y = \log_3 b$. Ta có: $a = 2^x$; $b = 3^y$ và $\begin{cases} x, y > 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

Khi đó: $P = \sqrt{\log_3 2^x} + \sqrt{\log_2 3^y} = \sqrt{x \log_3 2} + \sqrt{y \log_2 3} = \sqrt{x} \sqrt{\log_3 2} + \sqrt{y} \sqrt{\log_2 3}$.

Ta lại có: $P^2 = (\sqrt{x} \sqrt{\log_3 2} + \sqrt{y} \sqrt{\log_2 3})^2 \leq (x + y)(\log_3 2 + \log_2 3) = \log_3 2 + \log_2 3$.

Vậy $P_{\max} = \sqrt{\log_3 2 + \log_2 3}$.

Câu 47: [2D2-3.2-4] (THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018) Xét các số thực dương x, y thỏa

mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(x+y) + 3(x+y) + 2 = \log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2) + (x^2+y^2+xy+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(x+y) + 3(x+y) + \log_{\sqrt{3}} 3 = \log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2) + (x^2+y^2+xy+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}[3(x+y)] + 3(x+y) = \log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2) + (x^2+y^2+xy+2) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_{\sqrt{3}} t + t$, với $t > 0$.

có $f'(t) = \frac{1}{t \ln \sqrt{3}} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó: $f(3(x+y)) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow 3(x+y) = x^2+y^2+xy+2 \quad (1)$

Từ (1) $\Leftrightarrow xy = (x+y)^2 - 3(x+y) + 2$.

Ta có $x = x + xy - xy = x(y+1) - xy \leq \left(\frac{x+y+1}{2}\right)^2 - xy$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y + 1$.

Do đó từ (1), suy ra: $x \leq \frac{(x+y+1)^2}{4} - (x+y)^2 + 3(x+y) - 2$.

Đặt $t = x + y$, $t > 0$.

Suy ra: $P = \frac{2(x+y)+1+x}{x+y+6} \leq \frac{2t+1+\frac{(t+1)^2}{4}-t^2+3t-2}{t+6} = \frac{-3t^2+22t-3}{4(t+6)} = f(t)$.

$$f'(t) = \frac{-3t^2 - 36t + 135}{4(t+6)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

Ta có: (nhận).

Bảng biến thiên

t	0	3	$+\infty$
$f'(t)$		0	
	+	-	
		$\max P = \max_{(0,+\infty)} f(t) = f(3) = 1$	

Dựa vào BBT, ta có khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y + 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Câu 43. [2D2-3.2-4]. (THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018) Giả sử a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a \cdot 10^{3z} + b \cdot 10^{2z}$ đúng với mọi các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\log(x+y) = z$ và $\log(x^2 + y^2) = z + 1$. Giá trị của $a + b$ bằng

- A. $\frac{31}{2}$. B. $\frac{29}{2}$. C. $-\frac{31}{2}$. D. $-\frac{25}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t = 10^z$. Khi đó $x^3 + y^3 = a \cdot t^3 + b \cdot t^2$.

Ta có $\begin{cases} \log(x+y) = z \\ \log(x^2 + y^2) = z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 10^z = t \\ x^2 + y^2 = 10 \cdot 10^z = 10t \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{t^2 - 10t}{2}$.

Khi đó $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = t^3 - \frac{3t(t^2 - 10t)}{2} = -\frac{1}{2}t^3 + 15t^2$.

Suy ra $a = -\frac{1}{2}$, $b = 15$.

Vậy $a + b = \frac{29}{2}$.

Câu 21: [2D2-3.2-4] (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐÔNG NAI-LẦN 2-2018) Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $\log_a b = \frac{3}{2}$, $\log_c d = \frac{5}{4}$. Nếu $a - c = 9$, thì $b - d$ nhận giá trị nào

- A. 93. B. 85. C. 71. D. 76.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện: $a \neq 1$ và $c \neq 1$.

Từ giả thiết ta có: $a^3 = b^2$ và $c^5 = d^4$

Đặt: $a = m^2$ với $m \in \mathbb{N}$ và $m \geq 2$.

Đặt: $c = n^4$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$.

$$\text{Ta có: } a - c = 9 \Leftrightarrow m^2 - n^4 = 9 \Leftrightarrow (m - n^2)(m + n^2) = 9 \Rightarrow \begin{cases} m - n^2 = 1 \\ m + n^2 = 9 \end{cases}$$

(vì $m, n \in \mathbb{N}$ và $m, n \geq 2$)

Suy ra $m = 5$ và $n = 2$ do đó $b - d = m^3 - n^5 = 93$.

Câu 48: [2D2-3.2-4] (CHUYÊN KHTN -LẦN 1-2018) Cho các số $a, b > 1$ thỏa mãn

$\log_2 a + \log_3 b = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b}$ bằng:

A. $\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}$.

B. $\sqrt{\log_3 2} + \sqrt{\log_2 3}$.

C. $\frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_3 2)$.

D. $\frac{2}{\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}}$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $x = \log_2 a$; $y = \log_3 b$. Ta có: $a = 2^x$; $b = 3^y$ và $\begin{cases} x, y > 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

Khi đó: $P = \sqrt{\log_3 2^x} + \sqrt{\log_2 3^y} = \sqrt{x \log_3 2} + \sqrt{y \log_2 3} = \sqrt{x} \sqrt{\log_3 2} + \sqrt{y} \sqrt{\log_2 3}$.

Ta lại có: $P^2 = (\sqrt{x} \sqrt{\log_3 2} + \sqrt{y} \sqrt{\log_2 3})^2 \leq (x + y)(\log_3 2 + \log_2 3) = \log_3 2 + \log_2 3$.

Vậy $P_{\max} = \sqrt{\log_3 2 + \log_2 3}$.

Câu 44. [2D2-3.2-4] (ĐỀ CHÍNH THỨC 2018 - Mã 101) Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn

$\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. 6. **B.** 9. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $a > 0$, $b > 0$ nên $\begin{cases} 3a + 2b + 1 > 1 \\ 9a^2 + b^2 + 1 > 1 \\ 6ab + 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) > 0 \\ \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) > 0 \end{cases}$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta được

$$\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) \geq 2\sqrt{\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1)}$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq 2\sqrt{\log_{6ab+1}(9a^2 + b^2 + 1)} \Leftrightarrow \log_{6ab+1}(9a^2 + b^2 + 1) \leq 1 \Leftrightarrow 9a^2 + b^2 + 1 \leq 6ab + 1$$

$$\Leftrightarrow (3a - b)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 3a = b.$$

Vì dấu “=” đã xảy ra nên

$$\log_{3a+2b+1}(9a^2+b^2+1)=\log_{6ab+1}(3a+2b+1) \Leftrightarrow \log_{3b+1}(2b^2+1)=\log_{2b^2+1}(3b+1)$$

$$\Leftrightarrow 2b^2+1=3b+1 \Leftrightarrow 2b^2-3b=0 \Leftrightarrow b=\frac{3}{2} \text{ (vì } b>0 \text{)}. \text{ Suy ra } a=\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } a+2b=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}.$$