Câu 48: **[2D2-3.2-4] (THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội năm 2017-2018)** Cho các số a, $b>1$ thỏa mãn $\log_2 a+\log_3 b=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{\log_3 a}+\sqrt{\log_2 b}$ bằng:

A. $\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}$.

B. $\sqrt{\log_3 2}+\sqrt{\log_2 3}$.

C. $\frac{1}{2}\left(\log_2 3+\log_3 2\right)$.

D. $\frac{2}{\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}}$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $x=\log_2 a$; $y=\log_3 b$. Ta có: $a=2^x$; $b=3^y$ và $\begin{cases}x,\ y>0\\ x+y=1\end{cases}$.

Khi đó: $P=\sqrt{\log_3 2^x}+\sqrt{\log_2 3^y}=\sqrt{x\log_3 2}+\sqrt{y\log_2 3}=\sqrt{x}\sqrt{\log_3 2}+\sqrt{y}\sqrt{\log_2 3}$.

Ta lại có: $P^2=\left(\sqrt{x}\sqrt{\log_3 2}+\sqrt{y}\sqrt{\log_2 3}\right)^2\le(x+y)\left(\log_3 2+\log_2 3\right)=\log_3 2+\log_2 3$.

Vậy $P_{\max}=\sqrt{\log_3 2+\log_2 3}$.

Câu 47: **[2D2-3.2-4] (THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018)** Xét các số thực dương $x,\ y$ thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\frac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$

$\Leftrightarrow\log_{\sqrt{3}}(x+y)+3(x+y)+2=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right)+\left(x^2+y^2+xy+2\right)$

$\Leftrightarrow\log_{\sqrt{3}}(x+y)+3(x+y)+\log_{\sqrt{3}}3=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right)+\left(x^2+y^2+xy+2\right)$

$\Leftrightarrow\log_{\sqrt{3}}\left[3(x+y)\right]+3(x+y)=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right)+\left(x^2+y^2+xy+2\right)\quad(*)$.

Xét hàm số $f(t)=\log_{\sqrt{3}}t+t$, với $t>0$.

có $f'(t)=\frac{1}{t.\ln\sqrt{3}}+1>0$, $\forall t>0$.

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó: $f\left(3(x+y)\right)=f\left(x^2+y^2+xy+2\right)\Leftrightarrow3(x+y)=x^2+y^2+xy+2\quad(1)$.

Từ $(1)\Leftrightarrow xy=(x+y)^2-3(x+y)+2$.

Ta có $x=x+xy-xy=x(y+1)-xy\le\left(\frac{x+y+1}{2}\right)^2-xy$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y+1$.

Do đó từ (1), suy ra: $x\le \frac{(x+y+1)^2}{4}-(x+y)^2+3(x+y)-2$.

Đặt $t=x+y$, $t>0$.

Suy ra: $P=\frac{2(x+y)+1+x}{x+y+6}\le \frac{2t+1+\frac{(t+1)^2}{4}-t^2+3t-2}{t+6}=\frac{-3t^2+22t-3}{4(t+6)}=f(t)$.

Ta có: $f'(t)=\frac{-3t^2-36t+135}{4(t+6)^2}=0\Leftrightarrow t=3$ (nhận).

Bảng biến thiên

t	0		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào BBT, ta có $\max P=\max_{(0;+\infty)} f(t)=f(3)=1$ khi và chỉ khi $\begin{cases}x=y+1\\x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$.

Câu 43. [2D2-3.2-4]. (THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018) Giả sử a, b là các số thực sao cho $x^3+y^3=a.10^{3z}+b.10^{2z}$ đúng với mọi các số thực dương x, y, z thoả mãn $\log(x+y)=z$ và $\log(x^2+y^2)=z+1$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. $\frac{31}{2}$. **B.** $\frac{29}{2}$. **C.** $-\frac{31}{2}$. **D.** $-\frac{25}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t=10^z$. Khi đó $x^3+y^3=a.t^3+b.t^2$.

Ta có $\begin{cases}\log(x+y)=z\\\log(x^2+y^2)=z+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=10^z=t\\x^2+y^2=10.10^z=10t\end{cases}\Rightarrow xy=\frac{t^2-10.t}{2}$.

Khi đó $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=t^3-\frac{3t(t^2-10t)}{2}=-\frac{1}{2}t^3+15t^2$.

Suy ra $a=-\frac{1}{2}$, $b=15$.

Vậy $a+b=\frac{29}{2}$.

Câu 21: [2D2-3.2-4] (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI-LẦN 2-2018) Cho $a,\ b,\ c,\ d$ là các số nguyên dương thỏa mãn $\log_a b=\frac{3}{2}$, $\log_c d=\frac{5}{4}$. Nếu $a-c=9$, thì $b-d$ nhận giá trị nào

A. 93. **B.** 85. **C.** 71. **D.** 76.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện: $a\ne 1$ và $c\ne 1$.

Từ giả thiết ta có: $a^3=b^2$ và $c^5=d^4$

Đặt: $a=m^2$ với $m\in\mathbb{N}$ và $m\geq 2.$

Đặt: $c=n^4$ với $n\in\mathbb{N}$ và $n\geq 2.$

Ta có: $a-c=9 \Leftrightarrow m^2-n^4=9 \Leftrightarrow \left(m-n^2\right)\left(m+n^2\right)=9 \Rightarrow \begin{cases} m-n^2=1 \\ m+n^2=9 \end{cases}$

(vì $m,n\in\mathbb{N}$ và $m,n\geq 2$)

Suy ra $m=5$ và $n=2$ do đó $b-d=m^3-n^5=93.$

Câu 48: **[2D2-3.2-4] (CHUYÊN KHTN -LẦN 1-2018)** Cho các số a, $b>1$ thỏa mãn $\log_2 a+\log_3 b=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{\log_3 a}+\sqrt{\log_2 b}$ bằng:

A. $\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}$.

B. $\sqrt{\log_3 2}+\sqrt{\log_2 3}$.

C. $\frac{1}{2}\left(\log_2 3+\log_3 2\right)$.

D. $\frac{2}{\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}}$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $x=\log_2 a$; $y=\log_3 b$. Ta có: $a=2^x$; $b=3^y$ và $\begin{cases} x,\ y>0 \\ x+y=1 \end{cases}$.

Khi đó: $P=\sqrt{\log_3 2^x}+\sqrt{\log_2 3^y}=\sqrt{x\log_3 2}+\sqrt{y\log_2 3}=\sqrt{x}\sqrt{\log_3 2}+\sqrt{y}\sqrt{\log_2 3}$.

Ta lại có: $P^2=\left(\sqrt{x}\sqrt{\log_3 2}+\sqrt{y}\sqrt{\log_2 3}\right)^2\leq\left(x+y\right)\left(\log_3 2+\log_2 3\right)=\log_3 2+\log_2 3$.

Vậy $P_{\max}=\sqrt{\log_3 2+\log_2 3}$.

Câu 44. **[2D2-3.2-4] (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101)** Cho $a>0$, $b>0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)+\log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. 6.

B. 9.

C. $\frac{7}{2}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $a>0$, $b>0$ nên $\begin{cases} 3a+2b+1>1 \\ 9a^2+b^2+1>1 \\ 6ab+1>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)>0 \\ \log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)>0 \end{cases}$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta được

$\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)+\log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)\geq 2\sqrt{\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)+\log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)}$

$\Leftrightarrow 2\geq 2\sqrt{\log_{6ab+1}\left(9a^2+b^2+1\right)} \Leftrightarrow \log_{6ab+1}\left(9a^2+b^2+1\right)\leq 1 \Leftrightarrow 9a^2+b^2+1\leq 6ab+1$

$\Leftrightarrow \left(3a-b\right)^2\leq 0 \Leftrightarrow 3a=b$.

Vì dấu " = " đã xảy ra nên

$\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)=\log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right) \Leftrightarrow \log_{3b+1}\left(2b^2+1\right)=\log_{2b^2+1}\left(3b+1\right)$

$\Leftrightarrow 2b^2+1=3b+1 \Leftrightarrow 2b^2-3b=0 \Leftrightarrow b=\frac{3}{2}$ (vì $b>0$). Suy ra $a=\frac{1}{2}$.

Vậy $a+2b=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}$.