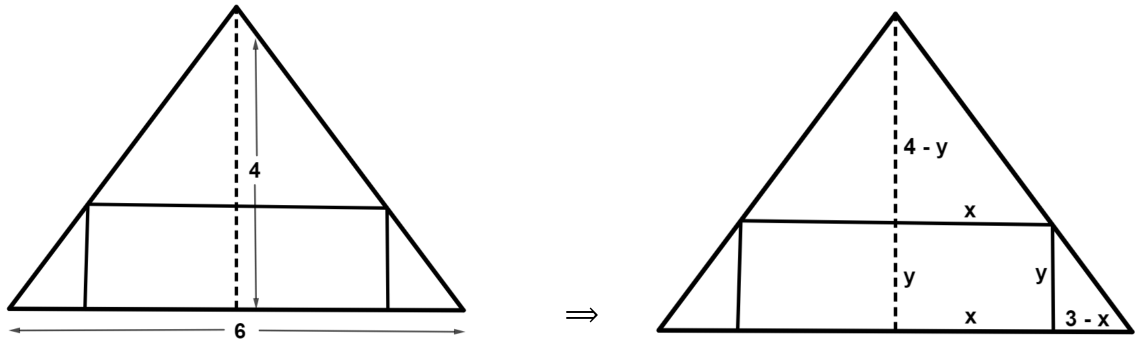
# PAU – MATEMÁTICAS II – ANÁLISIS – ANDALUCÍA – MODELOS DE 2013 RESUELTOS

**Profesor: Rafael Núñez Nogales**

---

1.- Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles de 6 metros de base (el lado desigual) y 4 metros de alto.

**Resolución**




Usando la semejanza de triángulos, $\frac{y}{3-x} = \frac{4-y}{x}$. Luego, xy = 12 – 4x – 3y + xy ; 3y = 12 – 4x ; $y = \frac{12-4x}{3}$

Como las dimensiones del rectángulo son 2x, y, el área es A = 2x.y

Función a maximizar: $A(x) = 2x\frac{12-4x}{3} = \frac{24x-8x^2}{3}$; $A'(x) = \frac{24-16x}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$

$A''(x) = \frac{-16}{3} < 0$ ; $A''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-16}{3} < 0$. Para $x = \frac{3}{2}$ el área del rectángulo es máxima.

La altura sería $y = \frac{12-4\frac{3}{2}}{3} = 2$. Por tanto, las dimensiones del rectángulo son 3 m x 2 m

2.- Sean f y g las funciones definidas por f(x) = 2 − x y $g(x) = \frac{2}{x+1}$ para x ≠ −1.

a) Calcula los puntos de corte entre las gráficas de f y g.

**Resolución**

Los puntos de corte son las soluciones del sistema $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Rightarrow 2 - x = \frac{2}{x+1}$

Luego, (2 – x)(x + 1) = 2 ⇒ 2x + 2 – $x^2$ – x = 2 ⇒ $x^2$ – x = x(x –1) = 0 ⇒ x = 0, x = 1

Si x = 0, y = 2 – 0 = 2. El punto es P(0, 2)   Si x = 1, y = 2 – 1 = 1. El punto es Q(1, 1)

b) Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes.

**Resolución**

La gráfica de f es una recta que pasa por P(0, 2) y Q(1, 1).

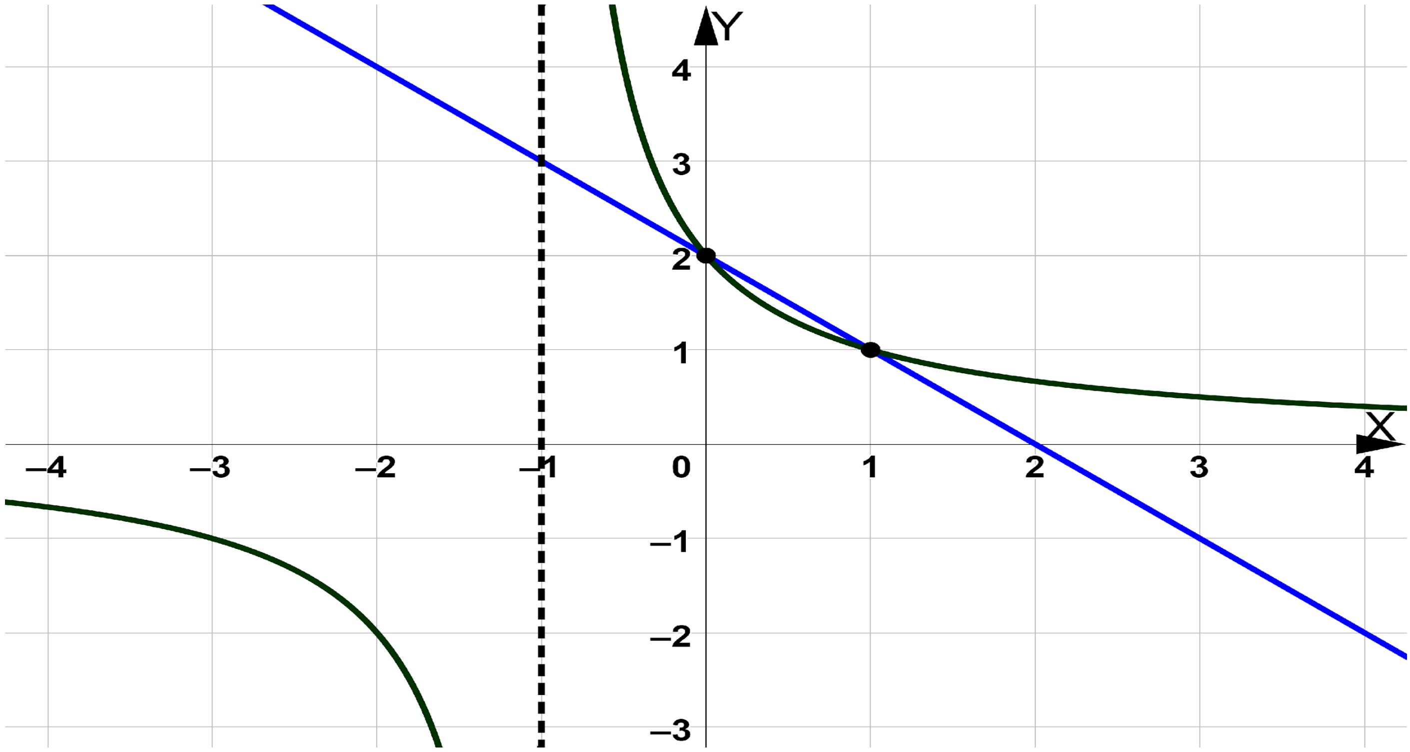
En cuanto a la gráfica de g, $g'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} < 0$. Luego, g es decreciente.

Además, $g(x) = 0 \Rightarrow$ g tiene en ±∞ la A.H. : y = 0 (eje X) ; $y_{gráfica} - y_{asíntota} = \frac{2}{x+1} = \frac{2}{x+1}$

$Si\ x \to +\infty,\ y_{gráfica} - y_{asíntota} > 0$. Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en +∞

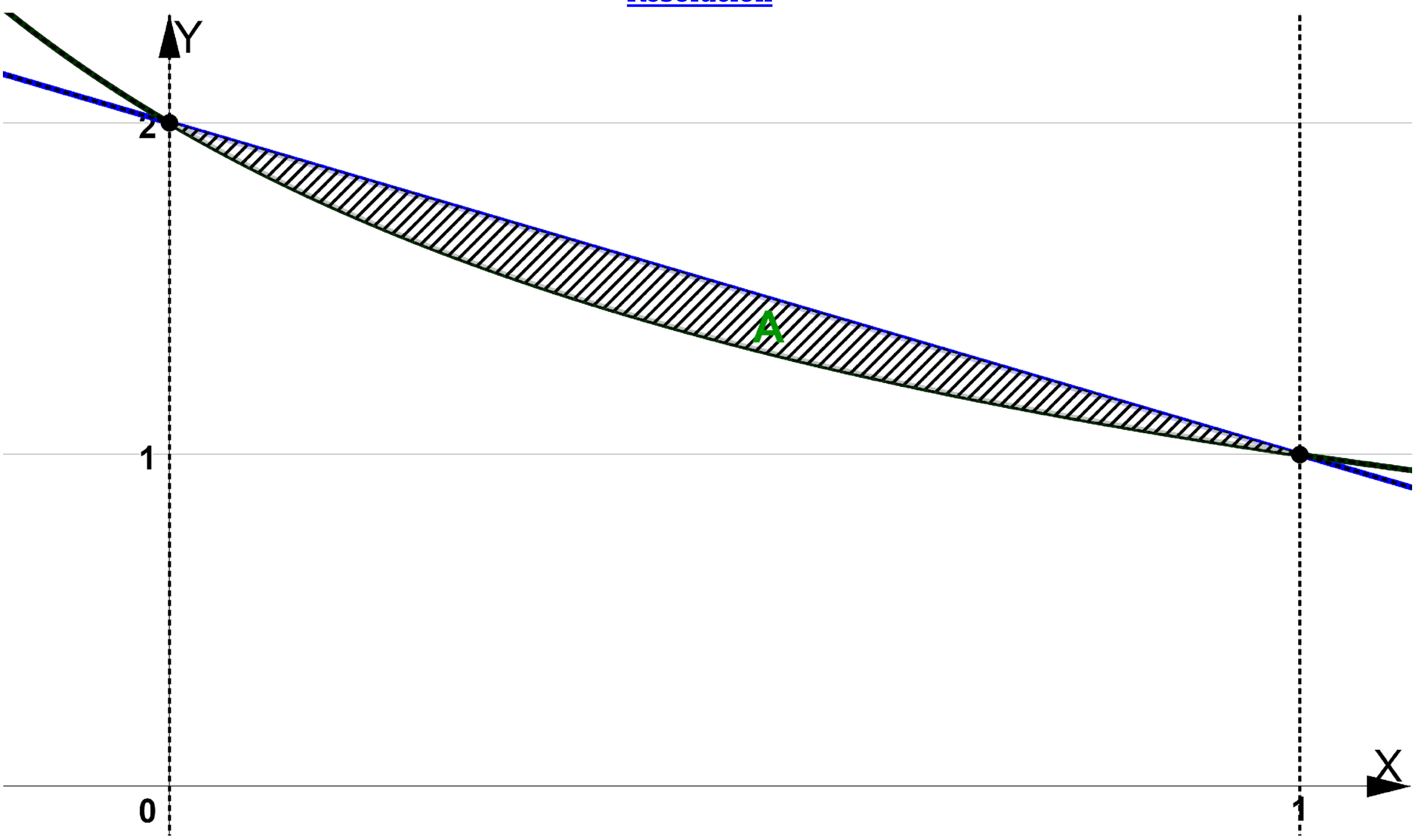
$Si\ x \to -\infty,\ y_{gráfica} - y_{asíntota} < 0$. Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en −∞

$g(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$ y $g(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \Rightarrow$ g tiene en x = –1 la A.V. : x = –1




c) Halla el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

**Resolución**




El área que se pide es $A = \int_0^1 \left(2 - x - \frac{2}{x+1}\right) dx$

Como $\int\left(2-x-\frac{2}{x+1}\right)dx = 2x - \frac{x^2}{2} - 2\ln ln\,|x+1| + k = \frac{4x - x^2 - 4\ln ln\,|x+1|}{2} + k$, una primitiva

es $p(x) = \frac{4x - x^2 - 4\ln ln\,|x+1|}{2}$. Por la regla de Barrow,

$$A = p(1) - p(0) = \frac{4.1 - 1^2 - 4\ln ln\,|1+1|}{2} - \frac{4.0 - 0^2 - 4\ln ln\,|0+1|}{2} = \frac{3 - 4\ln ln\,2}{2} \cong 0,1137\ u^2$$

3.- Sea f la función definida por $f(x) = x\,e^{1/x}$ para $x \geq -1$, $x \neq 0$.
a) Calcula los límites laterales de f en x = 0.

**Resolución**

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} xe^{1/x} = 0.\ e^{1/0^-} = 0.e^{-\infty} = 0.0 = 0$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{0^+}}}{\frac{1}{0^+}} = \frac{e^{+\infty}}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}$ Indeterminación. Veamos si se puede aplicar la regla de L´Hôpital: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}.\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$

Se puede aplicar. Por tanto, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f

**Resolución**

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, f tiene en x = 0 la A.V. : x = 0 (eje Y)

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty.e^{\frac{1}{+\infty}} = +\infty.e^0 = +\infty.1 = +\infty$. Luego, no hay asíntota horizontal en $+\infty$.

Veamos si tiene asíntota oblicua en $+\infty$, AO: y = mx + n

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = 1.$$

$[f(x) - mx] = \left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

Veamos si se puede aplicar la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}.\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

Se puede aplicar. Por tanto, n = 1. Luego, la asíntota oblicua en $+\infty$ es la recta de ecuación AO: $y = x + 1$

Estudiemos la posición de la gráfica respecto de la asíntota:

$$y_{gráfica} - y_{asíntota} = xe^{\frac{1}{x}} - (x+1) = xe^{\frac{1}{x}} - x - 1$$

$Si\ x \to +\infty,\ y_{gráfica} - y_{asíntota} > 0$. Luego, la gráfica está "por encima" de la asíntota en $+\infty$

4.- Calcula $\int_2^4 \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}}dx$ (Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{e^x}$ )

**Resolución**

Hallemos primero $I = \int \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}}dx$. Haciendo el cambio $t = \sqrt{e^x}$ ; $t^2 = e^x$ $\quad 2tdt = e^x dx$ .

Nos queda $I = \int \frac{2t}{t+1}dt$. Expresamos la fracción en forma mixta, $\frac{2t}{t+1} = 2 + \frac{-2}{t+1}$

Luego, $I = \int 2\,dt - 2\int \frac{1}{t+1}dt = 2t - 2\,ln|t+1| + k = 2\sqrt{e^x} - 2\,ln\left|\sqrt{e^x} + 1\right| + k$

Una primitiva es $p(x) = 2\sqrt{e^x} - 2ln\left|\sqrt{e^x} + 1\right|$.

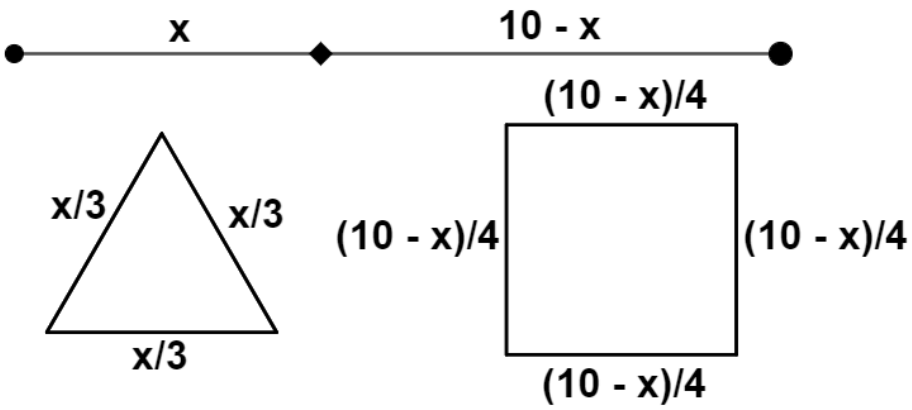
Por la regla de Barrow,

$$\int_2^4 \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}}dx = p(4) - p(2) = \left[2\sqrt{e^4} - 2ln\left|\sqrt{e^4}+1\right|\right] - \left[2\sqrt{e^2} - 2ln\left|\sqrt{e^2}+1\right|\right] =$$

$$= \left[2e^2 - 2ln(e^2+1)\right] - \left[2e - 2\ln ln\,(e+1)\right] = 2e^2 - 2e + 2\ln ln\,\frac{e+1}{e^2+1} \cong 7,7136$$

**5.- (prueba extraordinaria)** Un alambre de 10 metros de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el otro un cuadrado. Halla la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

**Resolución**



El área de un triángulo equilátero de lado “a” es $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ y el área de un cuadrado de lado “l” es $l^2$.

Como el perímetro del triángulo equilátero es x, entonces $a = \frac{x}{3}$

$$A(triángulo) = \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{x^2\sqrt{3}}{36}$$

Como el perímetro del cuadrado es 10 – x, entonces $l = \frac{10 - x}{4}$ ; $A(cuadrado) = \left(\frac{10 - x}{4}\right)^2 = \frac{(10 - x)^2}{16}$

Función a minimizar: $f(x) = A(triángulo) + A(cuadrado) = \frac{x^2\sqrt{3}}{36} + \frac{(10 - x)^2}{16}$

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{3}}{36} + \frac{2(10 - x)(-1)}{16} = \frac{8x\sqrt{3} - 18(10 - x)}{144} = \frac{(8\sqrt{3} + 18)x - 180}{144} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{180}{8\sqrt{3} + 18}$$

$f''(x) = \frac{8\sqrt{3} + 18}{144} > 0$ ; $f''\left(\frac{180}{8\sqrt{3} + 18}\right) = \frac{8\sqrt{3} + 18}{144} > 0$. Para $x = \frac{180}{8\sqrt{3} + 18}$ , f(x) alcanza el mínimo.

Por tanto, un trozo mide $\frac{180}{8\sqrt{3} + 18} \cong 5,65\ m$ y el otro, 10 – 5,65 = 4,35 m

**6.- (prueba extraordinaria)**

a) Determina la función f: R → R tal que $f'(x) = (2x + 1)e^{-x}$ y su grafica pasa por el origen de coordenadas.

**Resolución**

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (2x + 1)e^{-x}\,dx$ . Usamos el método de integración por partes:

$[u = 2x + 1\ 2\,dx\ \ dv = e^{-x}dx\ v =- e^{-x}] \Rightarrow f(x) = \int u\,dv = uv - \int v\,du = - e^{x}(2x + 1) + 2\int e^{-x}\,dx$

$$f(x) = - e^{-x}(2x + 1) + 2\left(- e^{-x}\right) + k = e^{-x}(- 2x - 1 - 2) + k = e^{-x}(- 2x - 3) + k$$

Como f(x) pasa por (0, 0), entonces $f(0) = 0 \Rightarrow e^{0}(- 2.0 - 3) + k = 0 \Rightarrow - 3 + k = 0 \to k = 3$

Luego, $f(x) = e^{-x}(- 2x - 3) + 3$

b) Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

**Resolución**

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = 0$. Como $f'(x) = (2x + 1)e^{-x}$ , entonces

$f'(x_0) = f'(0) = (2.0 + 1)e^{0} = 1$ ; $f(x_0) = f(0) = 0$. La recta tangente es rtg: y = 1(x – 0) + 0 ; rtg: y = x

**7.- (prueba extraordinaria)** Sea f: (0, +∞) → R la función definida por $f(x) = \frac{2\ln ln(x)}{x^2}$

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

**Resolución**

f es derivable en (0, +∞) por ser el resultado de operar con funciones derivables

$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}.x^2 - 2x.2\ln ln\, x}{x^4} = \frac{2x - 2x.2\ln ln\, x}{x^4} = \frac{2(1-2\ln ln\, x)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln ln\, x = 0 \Leftrightarrow \ln ln\, x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{1/2}$

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

| | $(0,\ e^{1/2})$ | $e^{1/2}$ | $(e^{1/2}, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| f´(x) | + | 0 | – |
| f(x) | creciente | máximo | decreciente |

f es creciente en $(0,\ e^{1/2})$ y decreciente en $(e^{1/2}, +\infty)$

f tiene un máximo relativo en $x = e^{1/2}$, $y = f\left(e^{1/2}\right) = \frac{2\ln ln\, e^{1/2}}{\left(e^{1/2}\right)^2} = \frac{1}{e}$. Punto $M\left(e^{1/2}, \frac{1}{e}\right)$

b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

**Resolución**

Como $\lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln ln\, x}{x^2} = \frac{2(-\infty)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = (-\infty).\frac{1}{0^+} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$ ,, f tiene en x = 0 la A.V. : x = 0 (eje Y)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln ln\, x}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$ *Indeterm*. Veamos si se puede aplicar la regla

de L´Hôpital: $\lim_{x\to+\infty} \frac{(2\ln ln\, x)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2/x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ . Se puede aplicar. Por tanto, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

y f tiene en $+\infty$ la A.H. : y = 0 (eje X) . Como $y_{gráfica} - y_{asíntota} = \frac{2\ln ln\, x}{x^2} - 0 = \frac{2\ln ln\, x}{x^2}$

$si\ x \to +\infty,\ y_{gráfica} - y_{asíntota} > 0$ . Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en $+\infty$

**8.- (prueba extraordinaria)** Sea g: R → R la función definida por $g(x) = -x^2 + 6x - 5$.

a) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de g en el punto de abscisa x = 4.

**Resolución**

La ecuación de la recta normal a la gráfica de la función g en un punto $A(x_0, g(x_0))$ es

$rn: y = \frac{-1}{g'(x_0)}(x - x_0) + g(x_0)$. En este caso, $x_0 = 4$ ; $g'(x) = -2x + 6$, $g'\left(x_0\right) = g'(4) = -2.4 + 6 = -2$

$g\left(x_0\right) = g(4) = -4^2 + 6.4 - 5 = 3$ . Luego, $rn: y = \frac{-1}{-2}(x - 4) + 3 \Rightarrow rn: y = \frac{x}{2} + 1$

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta x – 2y + 2 = 0. Calcula el área de este recinto.

**Resolución**

La gráfica de g es una parábola de vértice $x_v = \frac{-6}{2.(-1)} = 3$ ; $y_v = -3^2 + 6.3 - 5 = 4$. Vértice V(3, 4)

Los puntos de corte de la parábola con los ejes de coordenadas son:

eje X: $0 = -x^2 + 6x - 5 \Rightarrow x = 1,\ \ x = 5$. Puntos (1, 0) y (5, 0)

eje Y: $f(0) = -0^2 + 6.0 - 5 = -5$. Punto (0, –5)

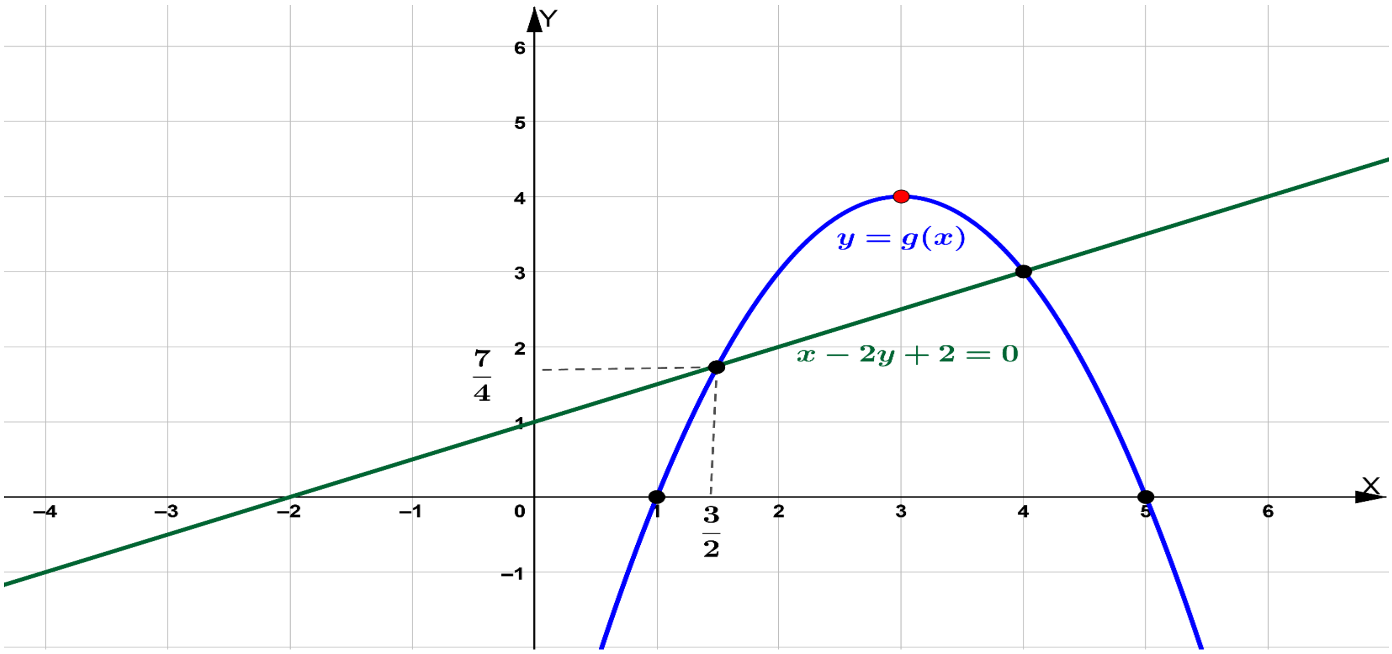
Puntos de corte de la parábola con la recta:

$\{y = -x^2 + 6x - 5\ \ x - 2y + 2 = 0 \to y = \frac{x+2}{2} \Rightarrow -x^2 + 6x - 5 = \frac{x+2}{2} \Rightarrow -2x^2 + 12x - 10 = x + 2$

$-2x^2 + 11x - 12 = 0 \to x = \frac{3}{2}; y = \frac{\frac{3}{2}+2}{2} = \frac{7}{4}. Punto\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)\ x = 4; y = \frac{4+2}{2} = 3. Punto(4,\ 3)$ .

La recta es la gráfica de $f(x) = \frac{x+2}{2}$.

---




$A = \int_{3/2}^{4} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_{3/2}^{4} \left[- x^2 + 6x - 5 - \frac{x+2}{2}\right] dx = \int_{3/2}^{4} \frac{-2x^2+12x-10-x-2}{2} dx.$

$A = \int_{3/2}^{4} \frac{1}{2}(- 2x^2 + 11x - 12)dx$. Una primitiva de la función integrando es

$p(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2x^3}{3} + \frac{11x^2}{2} - 12x\right) = \frac{1}{2}\,\frac{-72x+33x^2-4x^3}{6} = \frac{33x^2-4x^3-72x}{12}.$

Por la regla de Barrow, $A = p(4) - p\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{33.4^2 - 4.4^3 - 72.4}{12} - \frac{33\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 72\frac{3}{2}}{12}$

$A = \frac{-16}{12} - \frac{-47,25}{12} = \frac{31,25}{12} = \frac{125}{48} \cong 2,6042\ u^2$

9.- Sea f la función definida por $f(x) = \frac{x}{\mathrm{lnln}\, x}$ para x > 0, x ≠ 1

a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

**Resolución**

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{\mathrm{lnln}\, x} = \frac{0}{-\infty} = 0$, f no tiene en x = 0 asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x}{\mathrm{lnln}\, x} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x}{\mathrm{lnln}\, x} = \frac{1}{0^-} =- \infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x}{\mathrm{lnln}\, x} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x}{\mathrm{lnln}\, x} = \frac{1}{0^+} =+ \infty$, f tiene en x = 1 la AV: x = 1

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{lnln}\, x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ Indeterminación. Veamos si se puede aplicar la regla de L´Hôpital:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x)'}{(\mathrm{lnln}\, x)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x =+ \infty$ . Se puede aplicar.

Por tanto, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =+ \infty$ y f no tiene en $+\infty$ A.H.

Veamos si tiene asíntota oblicua en $+\infty$, AO: y = mx + n

$\frac{f(x)}{x} = \frac{x/\mathrm{lnln}\, x}{x} = \frac{1}{x} = 0$. Luego, no hay AO

$[f(x) - mx] = f(x) = +\infty$. Luego, f tiene una rama parabólica en $+\infty$

b) Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = e.

**Resolución**

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ y la de la recta normal es $rn: y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$.

En este caso, $x_0 = e$.

$f'(x) = \frac{1.\ln ln\, x - x.1/x}{x)^2} = \frac{\ln ln\, x - 1}{x)^2}$, entonces $f'(x_0) = f'(e) = \frac{\ln ln\, e - 1}{e)^2} = \frac{0}{1} = 0$, $f(x_0) = f(e) = \frac{e}{\ln ln\, e} = e$.

La ecuación de la recta tangente sería rtg: $y = 0(x - e) + e$ ; rtg: $y = e$.

La ecuación de la recta normal es $rn: y = \frac{-1}{0}(x - e) + e$ ; $rn: y - e = \frac{-1}{0}(x - e)$ ; $rn: x = e$

10.- Sea g: $(0, +\infty) \to R$ la función definida por $g(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}}$. Determina la primitiva de g cuya gráfica pasa por el punto P(1, 0). Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$

**Resolución**

Las infinitas primitivas de g son $G(x) = \int g(x)\, dx = \int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$.

Haciendo el cambio $t = \sqrt{x}$ ; $t^2 = x$ $\quad 2tdt = dx$ .

Nos queda $G(x) = \int \frac{2t}{t^2 + t} dt = \int \frac{2}{t+1} dt = 2 \ln ln\, |t + 1| + k = 2 \ln ln\, (\sqrt{x} + 1) + k$

Como G(x) pasa por P(1, 0), entonces $G(1) = 0 \Rightarrow 2 \ln ln\, (\sqrt{1} + 1) + k = 0 \Rightarrow k = -2 \ln ln\, 2$

Luego, $G(x) = 2 \ln ln\, (\sqrt{x} + 1) - 2 \ln ln\, 2$

11.- Sea f la función definida por $f(x) = \frac{k}{(x-a)(2x-1)}$ para $x \neq a$ y $x \neq \frac{1}{2}$

a) Halla a y k sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (0, 2) y que la recta x = 2 es una asíntota de dicha gráfica.

**Resolución**

Debe ser a = 2 porque si fuese distinto entonces $\lim_{x \to a} f(x)$ sería finito y la recta x = 2 no sería asíntota.

Por otra parte, como f pasa por (0, 2) entonces $f(0) = 2 \Rightarrow \frac{k}{(0-2)(2.0-1)} = 2 \Rightarrow \frac{k}{2} = 2$. De donde, k = 4

Conclusión: debe ser a = 2, k = 4

b) Para k = 4 y a = 2, halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

**Resolución**

Para k = 4, a = 2, $f(x) = \frac{4}{(x-2)(2x-1)} = \frac{4}{2x^2 - 5x + 2}$

Para x ≠ 2, $x \neq \frac{1}{2}$ f es derivable por ser el resultado de operar con funciones derivables.

$$f'(x) = \frac{0.(2x^2 - 5x + 2) - 4.(4x - 5)}{(2x^2 - 5x + 2)^2} = \frac{20 - 16x}{(2x^2 - 5x + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

| | (−∞, 1/2) | 1/2 | (1/2, 5/4) | 5/4 | (5/4, 2) | 2 | (2, +∞) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f´(x) | + | ∄ | + | 0 | – | ∄ | – |
| f(x) | creciente | | creciente | máximo | decreciente | | decreciente |

f es creciente en (−∞, 5/4) – {1/2} y decreciente en (5/4, +∞) – {2}

f tiene un máximo relativo en x = 5/4 , $y = f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{4}{\left(\frac{5}{4} - 2\right)\left(2\frac{5}{4} - 1\right)} = \frac{4}{\frac{-9}{8}} = \frac{-32}{9}$. Punto $M\left(\frac{5}{4}, \frac{-32}{9}\right)$

f no tiene mínimo relativo

12.- Calcula $\int_0^{\pi/2} x\, sen(2x)\, dx$

**Resolución**

Hallemos primero $I = \int x\, sen(2x)\, dx$. Usemos el método de integración por partes:

$$\left[u = x\ dx\ \ dv = sen(2x)\, dx\ v = \frac{-1}{2}\cos\cos(2x)\right] I = \int u\, dv = uv - \int v\, du = \frac{-x\cos\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int \cos\cos ($$

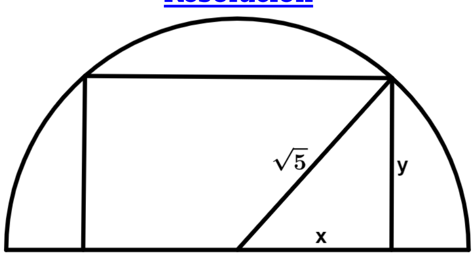
$I = \frac{-x\cos\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\frac{sen(2x)}{2} + k = \frac{sen(2x) - 2x\cos(2x)}{4} + k$. Una primitiva es $p(x) = \frac{sen(2x) - 2x\cos(2x)}{4}$.

Por la regla de Barrow,

$$\int_0^{\pi/2} x\, sen(2x)\, dx = p(\pi/2) - p(0) = \frac{sen\left(2\frac{\pi}{2}\right) - 2\frac{\pi}{2}\cos\left(2\frac{\pi}{2}\right)}{4} - \frac{sen(2.0) - 2.0\cos\cos(2.0)}{4} = \frac{-\pi(-1)}{4} = \frac{\pi}{4}$$

13.- Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de $\sqrt{5}$ cm de radio, de forma que uno de sus lados está contenido en el diámetro del semicírculo y el lado opuesto tiene sus vértices sobre la semicircunferencia. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que es el de mayor perímetro posible.

**Resolución**




Usando el teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow y = \sqrt{5 - x^2}$

Función a maximizar: $perímetro = p(x) = 4x + 2y = 4x + 2\sqrt{5 - x^2}$

$p'(x) = 4 + 2.\frac{1}{2\sqrt{5-x^2}}.(-2x) = 4 - \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}} = 4 \Rightarrow \frac{4x^2}{5-x^2} = 16$

Luego, $4x^2 = 80 - 16x^2 \Rightarrow 20x^2 = 80 \Rightarrow x^2 = 4$. Dado que x es positivo, resulta que x = 2

$$p''(x) = \frac{-2\sqrt{5-x^2} - (-2x).\frac{1}{2\sqrt{5-x^2}}.(-2x)}{5-x^2} = \frac{-2.(5-x^2) - (-2x).(-x)}{(5-x^2)\sqrt{5-x^2}} = \frac{-10}{(5-x^2)\sqrt{5-x^2}}$$

$p''(2) = \frac{-10}{(5-2^2)\sqrt{5-2^2}} = -10 < 0$. Para x = 2 el perímetro del rectángulo es máximo.

En este caso, $y = \sqrt{5 - 2^2} = 1$. Por tanto, las dimensiones del rectángulo son 4 cm x 1 cm

14.- Hallar $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$

**Resolución**

$I = \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$ ; $t = \sqrt{x}$ ; $t^2 = x$ $\quad 2tdt = dx$ ;queda $I = \int \frac{(1+t^2)2t}{1+t}dt = \int \frac{2t^3+2t}{t+1}dt$.

Expresamos en forma mixta, $\frac{2t^3+2t}{t+1} = 2t^2 - 2t + 4 + \frac{-4}{t+1}$

Luego, $I = \int(2t^2 - 2t + 4)dt - 4\int\frac{1}{t+1}dt = \frac{2t^3}{3} - t^2 + 4t - 4\,ln|t+1| + k$

Deshaciendo el cambio, $I = \frac{2x\sqrt{x}}{3} - x + 4\sqrt{x} - 4\,ln(\sqrt{x} + 1) + k$

15.- Considera la función f: R → R dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b y c sabiendo que la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0 es y + x = –3 y que el punto de inflexión tiene abscisa x = 1.

**Resolución**

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad ; \quad f''(x) = 6x + 2a$

La recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0 es rn: y = –x – 3, entonces la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f dicho punto es $\frac{-1}{-1} = 1$. Luego, $f'(0) = 1 \Rightarrow 3.0^2 + 2a.0 + b = 1$ ; b = 1

Al tener un punto de inflexión en $x = 1$, $f''(1) = 0$. Luego, $6.1 + 2a = 0 \Rightarrow a = -3$

Como la recta normal y la gráfica coinciden en x = 0, entonces f(0) = 0 – 3 = –3.

Luego, $0^3 + a.0^2 + b.0 + c = -3 \Rightarrow c = -3$. Conclusión: debe ser a = –3, b = 1, c = –3

16.- Sea g: (0, +∞) → R la función definida por g(x) = | ln x |

a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta y = 1. Calcula los puntos de corte entre ellas.

b) Calcula el área del recinto anterior.

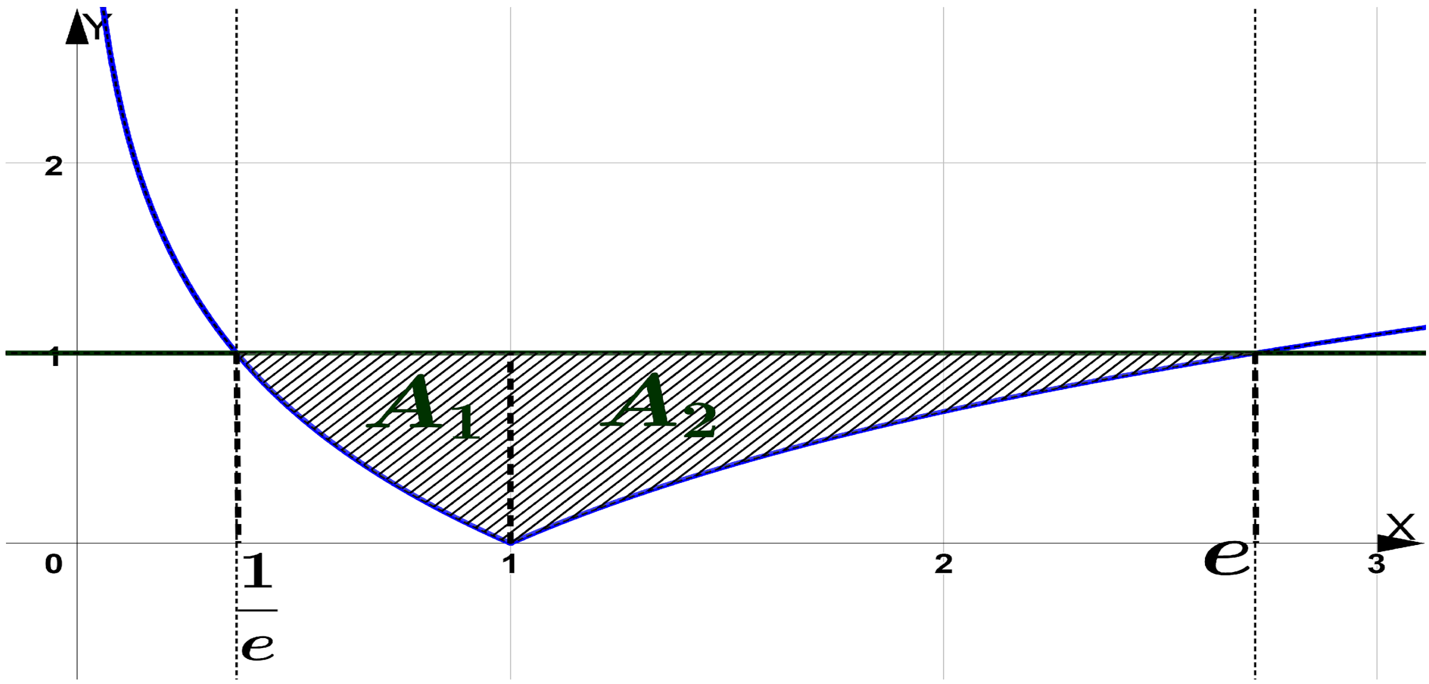
**Resolución**

$\ln ln\, x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ; $0 < x < 1$ $1$ $x > 1$ $\ln ln\, x$ $- 0 +$ $g() = |\ln ln\, x| - \ln ln\, x$ $0$ $\ln ln\, x$ .

Luego, $g(x) = |\ln ln\, x| = \{-\ln ln\, x, si\ 0 < x < 1\ \ \ln ln\, x, si\ x \geq 1$

Puntos de corte de la gráfica de g con los ejes de coordenadas:
eje X: $|\ln ln\, x| = 0 \Rightarrow \ln ln\, x = 0 \Rightarrow x = 1$. Punto $(1, 0)$ ; eje Y: $g(0) = \ln 0$, que $\nexists$. Luego, no corta al eje Y

Puntos de corte de la gráfica de g con la recta:
$\{y = |\ln ln\, x|\ y = 1 \Rightarrow |\ln ln\, x| = 1 \Rightarrow \ln ln\, x = 1\ \ln ln\, x = -1 \rightarrow x = e\ x = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow x = e; y = 1. Pu$




El área es
$$A = A_1 + A_2 = \int_{1/e}^{1} [1 - (-\ln ln\, x)]dx + \int_{1}^{e} (1 - \ln ln\, x)dx = \int_{1/e}^{1} (1 + \ln ln\, x)dx + \int_{1}^{e} (1 - \ln ln\, x)dx$$

Hallemos primero, $\int \ln ln\, x\, dx$. Usamos el método de integración por partes:

$$\left[u = \ln ln\, x\ \frac{dx}{x}\ dv = dx\ v = x\right] \Rightarrow \int \ln ln\, x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = x\, ln\, x - \int dx = x \ln ln\, x - x + k$$

$$I_1 = \int (1 + \ln ln\, x)dx = \int 1dx + \int \ln ln\, x\, dx = x + x \ln ln\, x - x + k = x \ln ln\, x + k$$

Una primitiva es $p(x) = x\, ln\, x$. Por la regla de Barrow,
$$A_1 = p(1) - p(\frac{1}{e}) = 1\, ln\, 1 - \frac{1}{e}\, ln\, \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

$$I_2 = \int (1 - \ln ln\, x)dx = \int 1dx - \int \ln ln\, x\, dx = x - (x \ln ln\, x - x) + k = 2x - x \ln ln\, x + k$$

Una primitiva es $q(x) = 2x - x\, ln\, x$.

Por la regla de Barrow, $A_2 = q(e) - q(1) = (2e - e\, ln\, e) - (2.1 - 1\, ln\, 1) = e - 2$

Luego, $A = A_1 + A_2 = \frac{1}{e} + e - 2 \cong 1,086\ u^2$

17.- Sea g la función definida por $g(x) = \frac{mx^3}{(x-n)^2}$ para x ≠ n.

a) Halla m y n sabiendo que la recta y = 2x – 4 es una asíntota de la gráfica de g.

**Resolución**

Como es una asíntota, obviamente debe ser al asíntota oblicua, A.O. : y = ax + b ↔ a = 2, b = –4

$2 = a = \frac{g(x)}{x} = \frac{mx^2}{(x-n)^2} = \frac{m}{1} = m$. Es decir, m = 2

$[g(x) - ax] = \left(\frac{2x^3}{(x-n)^2} - 2x\right) \frac{2x^3 - 2x^3 + 4nx^2 - 2n^2x}{(x-n)^2} = 4n \Rightarrow$ m = 2, n = –1

b) Determina si la gráfica de g es simétrica respecto al origen.

**Resolución**

Como m = 2, n = –1, $g(x) = \frac{2x^3}{(x+1)^2}$. Para que sea simétrica respecto al origen debe ser g(–x) = –g(x).

$g(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x+1)^2} = \frac{-2x^3}{(-x+1)^2} \neq -g(x) = \frac{-2x^3}{(x+1)^2}$. Luego, g no es simétrica respecto al origen

18.- De la función f: R → R definida por f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que alcanza un máximo relativo en x = 1, que la gráfica tiene un punto de inflexión en (0, 0) y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$. Calcula a, b, c y d

**Resolución**

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad ; \quad f''(x) = 6ax + 2b$

Al tener un punto de inflexión en x = 0, f´´(0) = 0. Luego, 6a.0 + 2b = 0 ⇒ b = 0

Además, como la gráfica pasa por (0, 0), f(0) = 0 ⇒ $a.0^3 + b.0^2 + c.0 + d = 0$ ⇒ d = 0

Al tener un extremo relativo en x = 1, f´(1) = 0. Luego, $3a.1^2 + 2b.1 + c = 0$ ⇒ 3a + 2b + c = 0.

Y como b = 0, tenemos 3a + c = 0 ⇒ c = –3a. Queda f(x) = $ax^3 - 3ax$.

Una primitiva de f es $F(x) = \int f(x)\,dx = \frac{a\,x^4}{4} - \frac{3a\,x^2}{2} = \frac{ax^4 - 6ax^2}{4}$

Luego, por la regla de Barrow

$\frac{5}{4} = \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \frac{a\,1^4 - 6a1^2}{4} - \frac{a\,0^4 - 6a0^2}{4} = \frac{-5a}{4} \Rightarrow a = -1.$

Por tanto, a = –1, b = 0, c = 3, d = 0 y la función sería f(x) = $-x^3 + 3x$

19.- Sea f: R → R la función definida por f(x) = $x^3 + ax^2 + bx + c$. Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica de f tiene abscisa x = 1 y que f tiene un mínimo relativo en x = 2 de valor –9. Calcula a, b y c.

**Resolución**

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad ; \quad f''(x) = 6x + 2a$

Al tener un punto de inflexión en x = 1, f´´(1) = 0. Luego, 6.1 + 2a = 0 ⇒ a = –3

Como tiene un mínimo relativo en x = 2, entonces, f´(2) = 0 ⇒ $3.2^2 + 2a.2 + b = 0$ ⇒ 4a + b = –12.

Y como a = –3, entonces b = 0. Nos quedaría $f(x) = x^3 - 3x^2 + c$

Además, como la gráfica pasa por (2, –9), $f(2) = -9 \Rightarrow 2^3 - 3.2^2 + c = -9 \Rightarrow c = -5$

Conclusión: debe ser a = –3, b = 0, c = –5 y quedaría la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$

20.- Calcula $\int_2^4 \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5} dx$.

**Resolución**

Sea $I = \int \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5} dx$. Factoricemos el denominador: $x = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow x = 1\ x = 5$ ; $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$

Haciendo la división obtenemos la forma mixta de la fracción:

$\frac{x^2}{x^2 - 6x + 5} = \frac{x^2}{(x-1)(x-5)} = 1 + \frac{6x-5}{(x-1)(x-5)}$. Luego,

$I = \int 1\, dx + \int \frac{6x-5}{(x-1)(x-5)} dx = x + \overbrace{\int \frac{6x-5}{(x-1)(x-5)} dx}^{I_1}$

Para calcular $I_1$ descomponemos la fracción en suma de fracciones simples: $\frac{6x-5}{(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5}$.

Multiplicando los dos miembros por $(x - 1)(x - 5)$, tenemos $6x - 5 = A(x - 5) + B(x - 1)$

para x = 1, sustituyendo, 1 = –4A ⇒ $A = \frac{-1}{4}$ ; para x = 5, sustituyendo, 25 = 4B ⇒ $B = \frac{25}{4}$

$I_1 = \int \left( \frac{-1/4}{x-1} + \frac{25/4}{x-5} \right) dx = \frac{-1}{4} \ln ln\, |x - 1| + \frac{25}{4} \ln ln\, |x - 5|$. Luego, una primitiva de la función a integrar es

$p(x) = x + \frac{-1}{4} \ln ln\, |x - 1| + \frac{25}{4} \ln ln\, |x - 5| = \frac{4x + 25 \ln ln\, |x-5| - ln|x-1|}{4}$

Por la regla de Barrow,

$\int_2^4 \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5} dx = p(4) - p(2) = \frac{16 - \ln ln\, 3}{4} - \frac{8 + 25 \ln ln\, 3}{4} = \frac{8 - 26 \ln ln\, 3}{4} \cong -5,14$

**21.- (prueba ordinaria)** Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \frac{x \cos\cos x + b\, sen\, x}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

**Resolución**

Vamos a hallar el límite: $\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x + b\, sen\, x}{x^3} = \frac{0 \cos 0 + b\, sen\, 0}{0^3} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

Aplicamos L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x + b\,\text{sen}\,x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\,\text{sen}\,x + b\cos x}{3x^2} = \frac{\cos 0 - 0\,\text{sen}\,0 + b\cos 0}{3.0^2} = \frac{1+b}{0}$$

Por tanto, por la regla de L´Hôpital, el límite que se pide es $\frac{1+b}{0}$

Como queremos que el límite sea finito, debe ser 1 + b = 0 porque de lo contrario el límite valdría ±∞. Luego, 1 + b = 0 ⇒ b = –1

Para b = –1, hallemos el límite, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\,\text{sen}\,x - \cos x}{3x^2} == \lim_{x\to 0}\frac{-\text{sen}\,x}{3x} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

Veamos si se puede aplicar de nuevo la regla de L´Hôpital: $\lim_{x\to 0}\frac{(-\text{sen}\,x)'}{(3x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{3} = \frac{-1}{3}$

Se puede aplicar. Por tanto, para b = –1 el límite del enunciado vale $\frac{-1}{3}$

**22.- (prueba ordinaria)** Sean f: R → R y g: R → R las funciones definidas por f(x) = | x (x – 2) | y g(x) = x + 4.

a) Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcula el punto de corte entre ambas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

**Resolución**

Expresemos f como función definida a trozos:

$x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ x = 2 \Rightarrow x < 0\ 0\ 0 < x < 2\ 2\ x > 2\ x^2 - 2x\ +\ 0\ -\ 0\ +\ f() = |x^2 - 2x|\ x^2 - 2$

$f(x) = |x(x-2)| = \{x^2 - 2x, si\ x \le 0\ ó\ x \ge 2\ \ -x^2 + 2x, si\ 0 < x < 2$ ; y = $x^2$ – 2x. Vértice $x_v = \frac{2}{2.1} = 1 \notin$ al dominio

y = $-x^2$ + 2x. Vértice $x_v = \frac{-2}{2.(-1)} = 1;\ y_v = -1^2 + 2.1 = 1$. El vértice es V(1, 1)

Los puntos de corte de f con los ejes de coordenadas son:

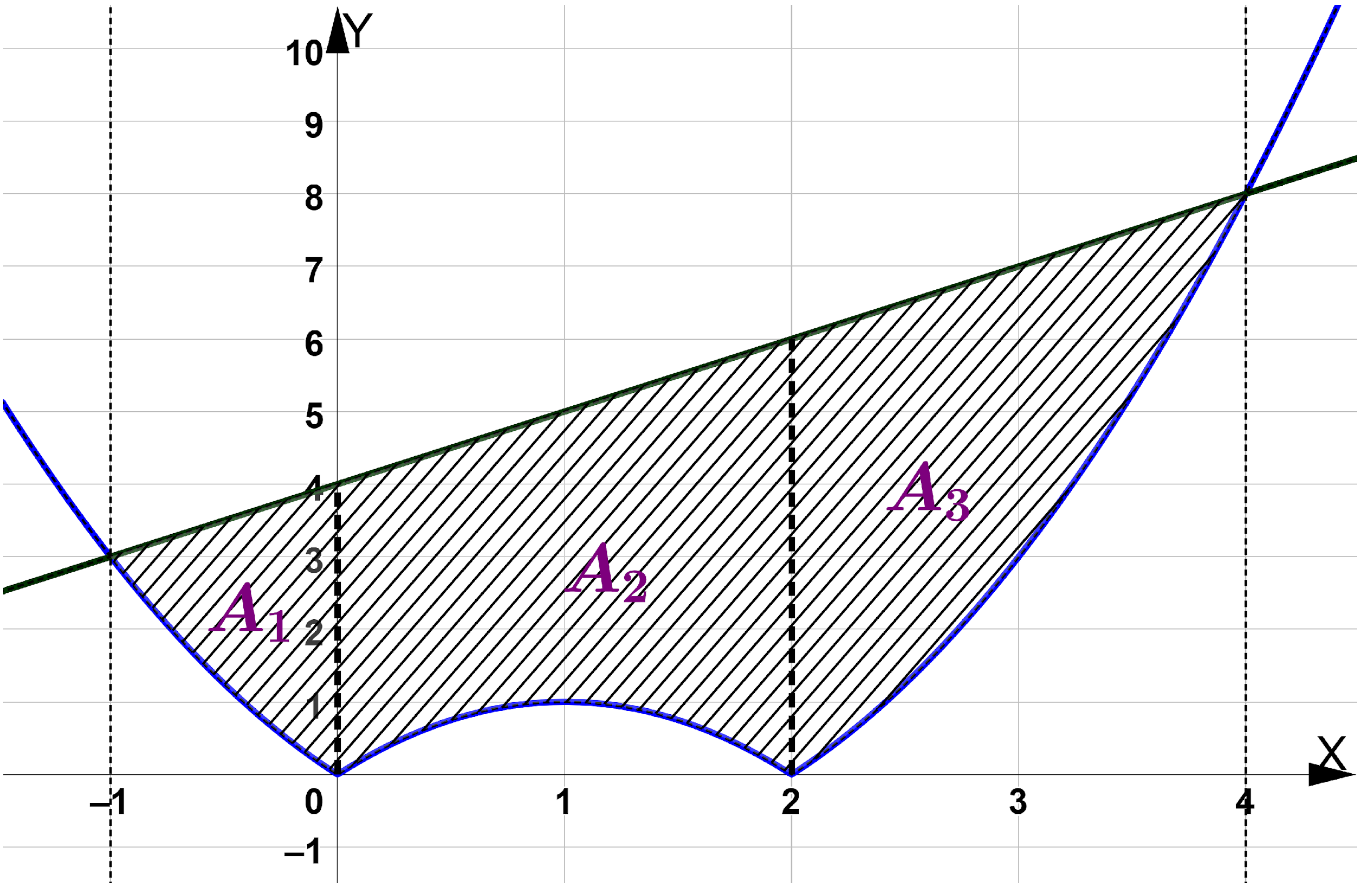
eje X: $x^2$ – 2x = 0 , $-x^2$ + 2x = 0 → x = 0, x = 2. Puntos (0, 0) y (2, 0)

eje Y: f(0) = $0^2$ – 2.0 = 0. Punto (0, 0)

Puntos de corte de f y g:

$\{y = |x^2 - 2x|\ y = x + 4 \Rightarrow |x^2 - 2x| = x + 4 \Rightarrow x^2 - 2x = x + 4\ x^2 - 2x = -x - 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 =$

$x = 4; y = 4 + 4 = 8.\ Punto\ (4,\ 8)\ x = -1; y = -1 + 4 = 3.\ Punto\ (-1,\ 3)\ x = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{2} \nexists$




El área que se pide es $A = A_1 + A_2 + A_3$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} \left[x + 4 - (x^2 - 2x)\right] dx = \int_{-1}^{0} (-x^2 + 3x + 4)\, dx.$$

Una primitiva de la función integrando es $p(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x = \frac{24x + 9x^2 - 2x^3}{6}$.

Por la regla de Barrow,

$$A_1 = p(0) - p(-1) = \frac{24.0 + 9.0^2 - 2.0^3}{6} - \frac{24(-1) + 9(-1)^2 - 2(-1)^3}{6} = 0 - \frac{-13}{6} = \frac{13}{6}$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} \left[x + 4 - (-x^2 + 2x)\right] dx = \int_{0}^{2} (x^2 - x + 4)\, dx.$$

Una primitiva de la función integrando es $q(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x = \frac{2x^3 - 3x^2 + 24x}{6}$.

Por la regla de Barrow,

$$A_2 = q(2) - q(0) = \frac{2.2^3 - 3.2^2 + 24.2}{6} - \frac{2.0^3 - 3.0^2 + 24.0}{6} = \frac{52}{6} - 0 = \frac{52}{6}$$

$$A_3 = \int_{2}^{4} \left[x + 4 - (x^2 - 2x)\right] dx = \int_{2}^{4} (-x^2 + 3x + 4)\, dx.$$

Una primitiva de la función integrando es $r(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x = \frac{24x + 9x^2 - 2x^3}{6}$.

Por la regla de Barrow, $A_3 = r(4) - r(2) = \frac{24.4 + 9.4^2 - 2.4^3}{6} - \frac{24.2 + 9.2^2 - 2.2^3}{6} = \frac{112}{6} - \frac{68}{6} = \frac{44}{6}$

Luego, el área que se pide es $A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{13}{6} + \frac{52}{6} + \frac{44}{6} = \frac{109}{6} \cong 18,17\ u^2$

**23.- (prueba ordinaria)** Sea f: $(-\infty, 1) \to$ R la función definida por
$f(x) = \{x + 2e^{-x}, si\ x \le 0\ a\sqrt{b - x}, si\ 0 < x < 1$
(a) Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.

**Resolución**

Al ser derivable, en particular es derivable en x = 0. Para x ≠ 0, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Como debe ser continua en x = 0, $f(x) = f(x) \Rightarrow 0 + 2e^0 = a\sqrt{b - 0} \Rightarrow 2 = a\sqrt{b}$

$Si\ x < 0,\ f'(x) = \left[x + 2e^{-x}\right]' = 1 - 2e^{-x}$ ; $Si\ x > 0,\ f'(x) = \left[a\sqrt{b - x}\right]' = \frac{-a}{2\sqrt{b-x}}$

Como debe ser derivable en x = 0:
$f'(x) = f'(x) \Rightarrow 1 - 2e^0 = \frac{-a}{2\sqrt{b-0}} \Rightarrow -1 = \frac{-a}{2\sqrt{b}} \Rightarrow a = 2\sqrt{b}$ . Nos queda $\{a\sqrt{b} = 2\ 2\sqrt{b} = a$ .

Sustituyendo “a” en la 1ª ecuación, $2\sqrt{b} . \sqrt{b} = 2 \Rightarrow b = 1$. Por tanto, $a = 2\sqrt{b} = 2\sqrt{1} = 2$

Conclusión: debe ser a = 2, b = 1. En este caso, f´(0) = –1

(b) Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

**Resolución**

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es
rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ y la de la recta normal es $rn: y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$

En este caso, $x_0 = 0$ ; $f'(x_0) = f'(0) = -1$ ; $f(x_0) = f(0) = 0 + 2.e^0 = 2$

rtg: $y = -1(x - 0) + 2 \Rightarrow$ rtg: $y = -x + 2$ $\qquad rn: y = \frac{-1}{-1}(x - 0) + 2 \Rightarrow rn: y = x + 2$

**24.- (prueba ordinaria)** Sea g: R → R definida por $g(x) = \ln(x^2 + 1)$. Calcula la primitiva de g cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

**Resolución**

Sea una primitiva de g, $G(x) = \int g(x)\,dx = \int ln(x^2 + 1)\,dx$ .

Usamos el método de integración por partes:

$$\left[u = ln(x^2 + 1)\ \frac{2x}{x^2+1}\,dx\ dv = dx\ v = x\right] \Rightarrow$$

$$G(x) = \int u\,dv = uv - \int v\,du = x\,ln(x^2 + 1) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = x - arctg\,x$$

$G(x) = x\, ln\left(x^2 + 1\right) - 2x + 2\, arctg\, x + k$

Como G(x) pasa por (0, 0), entonces $G(0) = 0 \Rightarrow 0\, ln\left(0^2 + 1\right) - 2.0 + 2arctg\, 0 + k = 0 \Rightarrow k = 0$

Luego, la primitiva que se busca es $G(x) = x\, ln\left(x^2 + 1\right) - 2x + 2\, arctg\, x$