TAXA DE VARIAÇÃO E OTIMIZAÇÃO

Matemática B

11.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2024/2025

Ficha técnica

Título:
Coletânea de tarefas das turmas piloto - Taxa de variação e otimização (Matemática B - 11.º ano)

Autoria e adaptação:
Professores das turmas piloto de Matemática B

Revisão:
Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:
Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em https://www.pexels.com/pt-br/foto/grupo-de-pessoas-assistindo-no-laptop-1595385/

Data:
Lisboa, janeiro de 2025

Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.°, 11.° e 12.° anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

TEMA - TAXA DE VARIAÇÃO E OTIMIZAÇÃO

Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
3	Tarefa 1 Os radares de velocidade média	**Taxa de Variação Média** Cálculo e interpretação da variação e da taxa de variação média	• Calcular e interpretar a variação entre dois pontos do domínio de uma dada função. • Calcular a taxa média de variação entre dois pontos do domínio de uma função e interpretar geometricamente o valor obtido. • Calcular, através da observação da representação gráfica, a taxa média de variação entre dois pontos do domínio de uma função.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Comunicação matemática • Organização do trabalho dos alunos • Resolução de problemas, modelação e conexões • Raciocínio e lógica matemática	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D)
3	Tarefa 2 Radares de velocidade instantânea	**Taxa de Variação Instantânea** Cálculo e interpretação da variação e da taxa de variação instantânea Calcular numericamente e interpretar em termos geométricos a taxa de variação instantânea	• Calcular numericamente e interpretar em termos geométricos a taxa de variação instantânea.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Comunicação matemática • Práticas enriquecedoras e criatividade • Tarefas e recursos educativos • Recurso sistemático à tecnologia	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)

6	Tarefa 3 Relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia da função	**Taxa de Variação Instantânea** Cálculo e interpretação da variação e da taxa de variação instantânea Calcular numericamente e interpretar em termos geométricos a taxa de variação instantânea	• Reconhecer, numérica e graficamente, a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia de uma função.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Comunicação matemática • Resolução de problemas, modelação e conexões • Recurso sistemático à tecnologia • Raciocínio e lógica matemática	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)
4	Tarefa 4 Vamos otimizar	**Otimização** Resolução de problemas envolvendo taxas de variação	• Estudar gráfica e numericamente a monotonia de funções, recorrendo ao gráfico da função e ao gráfico da taxa de variação. • Reconhecer, numérica e graficamente, a relação entre os zeros da taxa de variação e os extremos de uma função. • Resolver problemas que envolvam a determinação de extremos de funções no contexto da vida real. • Perceber a importância do processo de modelação matemática na sociedade atual.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Recurso sistemático à tecnologia • Tarefas e recursos educativos • Comunicação matemática	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)

5	Tarefa 5 Modelar para otimizar	**Otimização** Resolução de problemas envolvendo taxas de variação	• Estudar gráfica e numericamente a monotonia de funções, recorrendo ao gráfico da função. • Resolver problemas que envolvam a determinação de extremos de funções no contexto da vida real. • Resolver problemas simples de modelação matemática. • Perceber a importância do processo de modelação matemática na sociedade atual.	Trabalho em pequenos grupos, com discussão em turma	• Resolução de problemas, modelação e conexões • Raciocínio e lógica matemática • Recurso sistemático à tecnologia • Tarefas e recursos educativos • Organização do trabalho dos alunos • Comunicação matemática	• Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) • Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) • Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)

Tarefa 1

Os radares de velocidade média

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa introduz-se o conceito de taxa média de variação com recurso à velocidade média, generalizando-o, posteriormente, a outras situações.

Conhecimentos prévios dos alunos: Funções polinomiais. Interpretação de gráficos. Equação reduzida da reta.

Materiais e recursos: Calculadora.

Notas e sugestões:

Sugere-se que a aula comece com a visualização do vídeo Como funcionam os Radares de Velocidade Média (ANSR Radares de Portugal).

Na parte I, explora-se a velocidade média. Propõe-se que o esquema ("Como funciona o radar?") comece por ser analisado em grande grupo, organizando-se de seguida os alunos em pequenos grupos para resolverem esta parte. Antes de passarem à parte 2, as conclusões deverão ser discutidas pelo grande grupo.

Na parte II, a taxa média de variação é associada à variação do peso e recorre-se à expressão de uma função. Poderá ser necessária alguma orientação inicial por parte do professor. Mais uma vez, no final desta parte, deverá ser feita a discussão, em grande grupo, das conclusões.

Por fim, na parte III, recorre-se à representação gráfica de uma função para determinar a taxa média de variação.

Aqui, há a oportunidade para explorar o facto de a taxa média de variação depender apenas dos valores da função nos extremos e não transmitir qualquer informação sobre o comportamento da função no interior do intervalo. Deverá recorrer-se à discussão em grande grupo para sistematização dos conceitos em estudo.

Nas turmas piloto, os alunos mostraram grande interesse pelo tema da velocidade média mas, em duas turmas, apresentaram algumas dificuldades na compreensão do conceito da taxa média de variação e na sua aplicação a outras situações.

Tarefa 1

Os radares de velocidade média

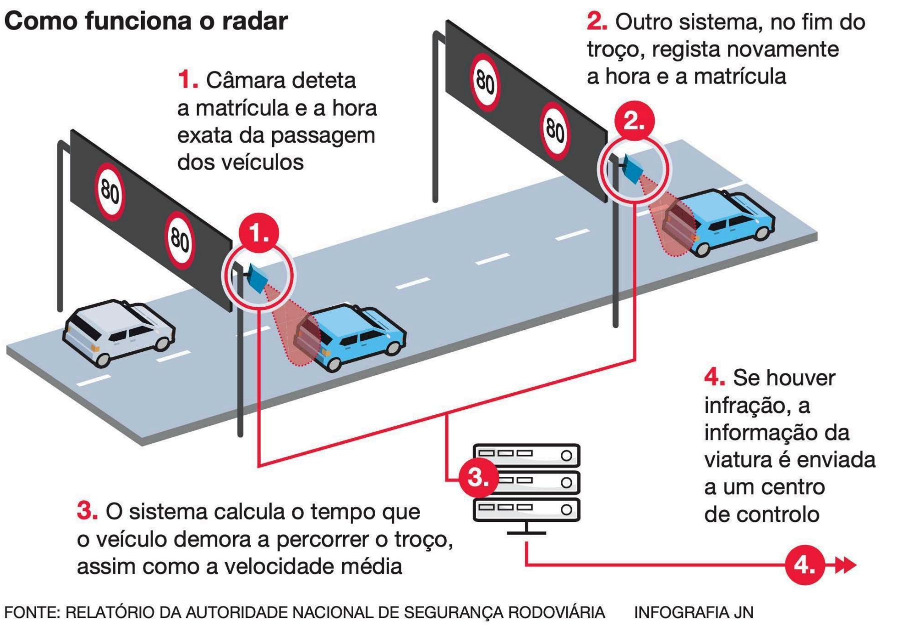
Os radares de velocidade média começaram a funcionar nas estradas portuguesas no final de 2021. Estes radares têm como objetivo calcular se, em média, os veículos circulam com mais velocidade do que o permitido num determinado percurso.

ANSR Radares de Portugal (radaresavista.pt)

Visualiza o vídeo: Como funcionam os Radares de Velocidade Média.

Parte I

A figura apresenta, de forma esquemática, como funcionam os radares de velocidade média, e responde às questões seguintes.



1. Para além do tempo que o veículo demora a percorrer o troço, de que outro elemento necessita o radar para calcular a velocidade média?

2. Explica como é que se pode proceder para calcular a velocidade média de um veículo num determinado troço.

3. Um agente da polícia multou um condutor numa autoestrada por, num determinado troço, a velocidade média calculada ter sido de 130 km/h. O condutor alegou que as contas podiam não estar certas, pois ele esteve parado 10 minutos, por estar indisposto. Deve o agente multar o condutor?

4. Num troço de de uma autoestrada onde existe um radar de velocidade média, um condutor percorreu os 200 km em duas horas. Esteve parado durante meia hora para mudar um pneu.

   4.1. Qual foi a velocidade média (em km/h) do seu percurso, registada pelo radar de velocidade média?

   4.2. Qual foi a velocidade média no mesmo percurso mas contando apenas o tempo em que o condutor não esteve parado?

5. Comenta a seguinte afirmação:

   "*O público em geral compreende o que está na base dos novos radares de velocidade média.*"

Parte II

A Maria foi pesada durante os 10 primeiros dias de vida sempre à mesma hora (do nascimento). O seu peso evoluiu de acordo com a seguinte função:

$P(t) =- 0,0046t^3 + 0,097t^2 - 0,417t + 3,\ 0 \leq t \leq 10$

em que P representa o peso da Maria, em quilogramas, e t o tempo decorrido, em dias, após o nascimento.

Nota: O "peso" refere-se à massa corporal.

1. Qual foi a variação do peso desde o nascimento até ao 4.º dia?

2. Qual foi a variação média do peso nesse intervalo de tempo? Interpreta o valor obtido no contexto da situação descrita.

3. Qual foi a variação média do peso da Maria entre o 6.º e o 10.º dia?

4. Sabendo que, entre o dia do nascimento e o 6.º dia, a variação média do peso da Maria é, aproximadamente, igual a zero comenta a afirmação:

   "*A Maria manteve o mesmo peso durante todos esses dias.*"

5. Completa a tabela seguinte:

Intervalo de tempo $[a,\ b]$, em dias	$P(a)$	$P(b)$	$P(b)\ -\ P(a)$	$\frac{P(b)-P(a)}{b-a}$
$[0,\ 4]$				
$[1,\ 5]$				
$[6,\ 10]$				

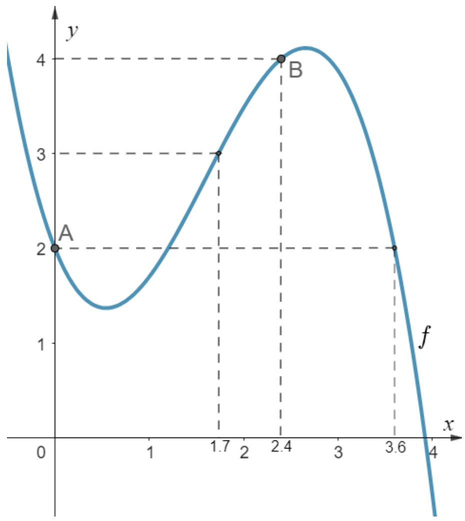
Nas situações descritas anteriormente, existe um conceito comum que se denomina taxa média de variação.

A taxa média de variação de uma função f num intervalo $[a,\ b]$ é dada por

$$t.m.v._{[a,b]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Parte III

No referencial da figura ao lado, está representada a função f . Os pontos A e B pertencem ao gráfico da função.



1. Utilizando os valores apresentados, determina:
   1.1. a variação da função f no intervalo $[1,7\ ;\ 2,4]$;
   1.2. a taxa média de variação da função f no intervalo $[1,7\ ;\ 2,4]$.

2. Identifica as coordenadas dos pontos A e B e calcula o declive da reta AB (secante ao gráfico da função f nos pontos A e B). Compara o valor obtido com o valor de $t.m.v._{[0;2.4]}$. O que concluis?
   2.1. Determina a taxa média de variação da função f no intervalo $[0;\ 3,6]$.O que concluis?

Tarefa 2

Radares de velocidade instantânea

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa, é introduzida a taxa de variação instantânea com recurso à velocidade instantânea e aos radares que a controlam. Sem nunca referir limites ou derivadas, a velocidade é calculada com base na velocidade média mas para um intervalo de tempo com amplitude muito próxima de zero.

Também é feito o cálculo da taxa de variação (taxa de variação instantânea) com recurso à calculadora gráfica.

Conhecimentos prévios dos alunos: Taxa média de variação. Funções polinomiais. Interpretação de gráficos. Equação reduzida da reta.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica. Equipamento digital com acesso à internet. Recurso tecnológico com Python.

Notas e sugestões:

Sugere-se que o item 1 seja discutido em grande grupo.

Para os itens seguintes propõe-se que comecem com a visualização do vídeo "Como funcionam os Radares de Velocidade Instantânea".

Relativamente ao item 2, sugere-se que os alunos sejam organizados em pequenos grupos e as suas conclusões analisadas em grande grupo.

Neste item, o professor deve informar os alunos de que quando a distância percorrida é dada em função do tempo, a taxa de variação é a velocidade (velocidade instantânea).

O item 2.5.2. deverá ser resolvido em grande grupo pois o professor terá de explicar como usar a calculadora gráfica para determinar a taxa de variação.

Nos itens seguintes, sugere-se que os alunos sejam organizados em pequenos grupos e as suas conclusões analisadas em grande grupo.

Relativamente ao item 4, alerta-se que há um limite de casas decimais na linguagem Python. Os alunos poderão utilizar um valor tão pequeno que será aproximado a zero.

Por fim, no item 5 aborda-se o custo marginal enquanto taxa de variação da função custo.

Durante a aplicação da tarefa nas turmas piloto, os alunos mostraram-se curiosos relativamente aos radares de velocidade mas, tiveram dificuldade em apropriar-se do conceito e aplicá-lo a novas situações, bem como no que respeita à interpretação dos resultados no contexto dos problemas.

Apesar de gostarem da tarefa, o uso da calculadora gráfica nem sempre foi intuitivo, o que originou a necessidade dos professores acompanharem mais de perto o uso da tecnologia, explicando repetidamente os procedimentos.

Tarefa 2

Radares de velocidade instantânea

1. A Marília e o Joaquim deslocaram-se de Torres Novas à Guarda percorrendo a A23 - Autoestrada da Beira Interior. Cada um foi no seu automóvel e demoraram 2 h 15 min para percorrerem os 217 km . Ambos fizeram uma paragem em estações de serviço. No final, a Marília foi multada por excesso de velocidade, mas o Joaquim não.

Sabendo que a velocidade máxima nas autoestradas portuguesas é de 120 Km/h, apresenta uma razão para esta discrepância.

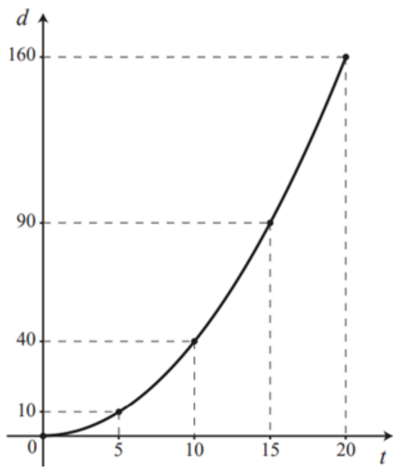
Visualiza o vídeo "como funcionam os Radares de Velocidade Instantânea".

Considera as imagens, ao lado, de radares de velocidade instantânea. Na imagem da esquerda tens o que é visualizado pelo operacional e na da direita a parte do radar que capta a informação. O radar para além da mira, dispõe de duas lentes sobrepostas. A mira fixa o veículo e cada uma das lentes captura imagens, quase simultâneas. Estes dados permitem fazer um cálculo aproximado da velocidade no momento das capturas.

A velocidade instantânea é aproximadamente igual à velocidade média quando a amplitude do intervalo de tempo é extremamente pequena, quase nula.

2. Um drone de vigilância florestal levantou voo verticalmente a partir de uma plataforma.

Na figura ao lado está, em referencial cartesiano, uma representação gráfica que traduz a correspondência entre o tempo, t, em segundos, e a distância, d, em metros, do drone à plataforma, nos primeiros 20 segundos de voo.



2.1. Recorre à apliqueta https://www.geogebra.org/m/j2kgyse9 e completa a tabela seguinte, movimentando o seletor, atribuí valores ao parâmetro a, cada vez mais próximos de zero:

Valor de a	Intervalo de tempo $[10\,,\ 10\ +\ a]$	Velocidade média (Taxa média de variação) $\frac{d(10+a)-d(10)}{a}$
5	$[10, 15]$	

2.2. De acordo com os valores que preencheste na tabela anterior, escreve um valor aproximado para a velocidade instantânea registada aos 10 segundos.

2.3. Qual é o nome dado à reta que interseta a representação gráfica da função nos pontos de abcissas 10 e 15?

2.4. Como se denomina a reta cuja interseção com a representação gráfica da função seja apenas o ponto de abcissa 10?

2.5. Nem sempre é prático fazer o cálculo da velocidade instantânea com aproximações sucessivas como fizeste na tabela. A tecnologia, por exemplo uma calculadora gráfica, permite determinar de forma mais expedita a velocidade instantânea (taxa de variação).

2.5.1. Considera que a distância d, em metros, em função do tempo t, em segundos, é dada por uma expressão do tipo $d(t)\ =\ at^2$, em que $a\ \neq\ 0$ e $0\ \leq\ t\ \leq\ 20$.
Qual é o valor de a, sabendo que $d(10)\ =\ 40$?

(A) $-\frac{4}{25}$ (B) $-\frac{2}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{25}$

2.5.2. Recorrendo à calculadora gráfica, determina a velocidade instantânea registada aos 10 segundos. Compara o valor que obtiveste com o registado no item 2.2.

(Adaptado da Prova Final 3.º Ciclo - 2019, 2.ª fase)

A **taxa de variação (instantânea)** é aproximadamente igual à taxa média de variação quando a amplitude do intervalo é extremamente pequena, quase nula.
Graficamente, a taxa de variação (instantânea) é igual ao valor do declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto de tangência.

3. Uma partícula desloca-se em linha reta. A sua posição relativamente ao ponto de partida (origem do referencial) é dada por $s(t) = 3t^2 - t$, em que t representa o tempo decorrido em segundos e s a distância percorrida, em centímetros.

3.1. Determina a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $[1, 3]$.

3.2. Determina, recorrendo à calculadora gráfica, a velocidade instantânea para $t = 2$.

4. A Ana decidiu usar o programa em *Python*, apresentado a seguir, para determinar uma aproximação da taxa de variação (instantânea) de uma função do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d$ num dado ponto.

```
a=-2
b=3.5
c=1
d=4
x=2.5
fx=a*x**3+b*x**2+c*x+d
h=0.1
fxh=a*(x+h)**3+b*(x+h)**2+c*(x+h)+d
t=(fxh-fx)/h
print(t)
```

4.1. Completa a frase seguinte, de forma a obter uma afirmação verdadeira:

"*O programa determina uma aproximação da taxa de variação da função* ________________ *no ponto de abcissa* ______________".

4.2. A Ana apresentou o programa à turma. Depois de analisar o programa, o José Diogo disse-lhe o seguinte:

«O valor determinado pelo programa não é uma boa aproximação da taxa de variação da função no ponto escolhido».

4.2.1. Comenta a afirmação do José Diogo.

4.2.2. O que será necessário modificar no programa para melhorar a aproximação da taxa de variação?

4.2.3. Altera o programa de modo a obter uma melhor aproximação da taxa de variação.

5. O custo associado à produção de smartphones numa empresa é traduzido pela expressão $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 9x + 70$, em que x representa o número de unidades produzidas e C é o custo total de produção, em dezenas de euros.

5.1. Determina $C(0)$ e interpreta o resultado obtido no contexto da situação.

5.2. Determina o custo para produzir 150 smartphones. Calcula o custo de cada um.

Em Economia, o **custo marginal** é a taxa de variação (instantânea) da função custo.

5.3. Recorrendo à calculadora gráfica, determina o custo marginal da produção de 150 smartphones.

Tarefa 3

Relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia da função

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Pretende-se que os alunos conjeturem sobre a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia da função.

Conhecimentos prévios dos alunos: Sinal e monotonia de uma função. Construção de tabelas de variação de sinal e de monotonia.

Materiais e recursos: Equipamento digital com acesso à internet. Calculadora gráfica.

Notas e sugestões:
Sugere-se que, antes da realização da tarefa se recorde, com um exemplo gráfico, os conceitos de sinal e monotonia de uma função e a construção de tabelas de sinal e de monotonia.
Na parte I, os alunos deverão trabalhar em pequenos grupos e, no final discutir as conclusões, em grande grupo. O professor deverá alertar para o facto de nem sempre existir um extremo quando a taxa de variação é nula.
No item 2.2, se os alunos apresentarem dificuldades no preenchimento da tabela, linha "sinal da taxa de variação de g", pode-lhe ser sugerido que preencham em primeiro lugar a linha respeitante à monotonia de g (por observação direta do gráfico) e, posteriormente, chamando a atenção para a relação estabelecida no item 1, a linha "sinal da taxa de variação de g".
No item 3, é referida pela primeira vez a função taxa de variação. Se os alunos revelarem dificuldades em compreender esta "nova" função, sugere-se que o professor proponha aos alunos que representem graficamente uma função polinomial e a respetiva função taxa de variação no mesmo referencial, com o objetivo de visualizar a relação entre o sinal da função taxa de variação e a monotonia da função original.
Na parte II da tarefa, os alunos devem resolver os itens de aplicação em pequenos grupos, sendo os resultados analisados no final em grande grupo.

Esta tarefa demorou mais do que estava previsto.

As dificuldades principais foram:

- compreender o papel da função taxa de variação;
- distinguir a função taxa de variação da função original;
- não terem sido devidamente apropriados os conceitos de taxas de variação (média e instantânea) nem haver ainda destreza no uso da calculadora gráfica por parte de alguns alunos.

Ultrapassadas as dificuldades, a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia da função foi identificada de forma intuitiva em todas as turmas.

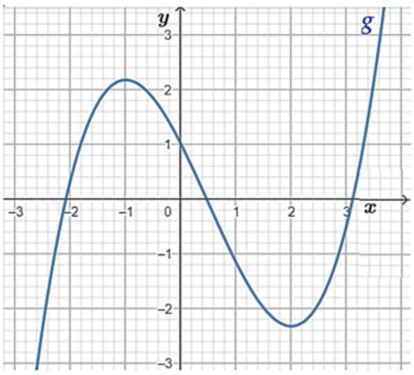
Tarefa 3

Relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia da função

Parte I

1. Resolve a atividade "Sinal da taxa de variação" em https://www.geogebra.org/m/ea8tg8cp .

2. Na figura ao lado, está representada graficamente, em referencial cartesiano, a função g.



2.1. Completa as afirmações seguintes selecionando a opção correta para cada espaço.

Para cada um dos seguintes itens, escreve, no teu caderno, os números **I** e **II** seguidos da opção selecionada a), b) ou c) para o número I e a), b), c) ou d) para o número II.

I	**II**
a) negativa **b)** positiva **c)** zero	**a)** é crescente **b)** é decrescente **c)** atinge um máximo **d)** atinge um mínimo

2.1.1. Quando $x \in]-\infty, -1[$, a taxa de variação é _I_ e a função g _II_.

2.1.2. Quando $x \in]-1, 2[$, a taxa de variação é _I_ e a função g _II_.

2.1.3. Quando $x \in]2, +\infty[$, a taxa de variação é _I_ e a função g _II_.

2.1.4. Quando $x = -1$, a taxa de variação é _I_ e a função g _II_.

2.1.5. Quando $x = 2$, a taxa de variação é _I_ e a função g _II_.

2.2. Completa a tabela seguinte:

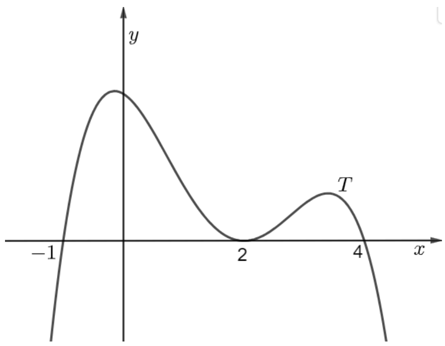
Nota: utiliza na linha sinal da taxa de variação os símbolos **+**, **-** ou **0**, e na linha da monotonia de g, **máx.**, **mín.**, ↗ ou ↘ .

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
Sinal da taxa de variação de g					
Monotonia de g					

3. Como vimos no item anterior, para cada x do domínio da função f, podemos calcular o valor da taxa de variação, $T(x)$, relativo ao ponto de abcissa x.

Na figura ao lado, está representada graficamente, em referencial cartesiano, a função T, taxa de variação de uma função f.

Como se pode observar na figura, a função T tem três zeros: -1, 2 e 4.



3.1. Constrói uma tabela semelhante à do item para as funções T e f.

3.2. Indica se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação:

"*Os zeros da taxa de variação T são as abcissas dos pontos onde a função f atinge extremos (máximos ou mínimos).*"

Justifica a tua resposta.

3.3. Acerca da função f, sabe-se que:

- $f(-1) = -2$;
- $f(2) = 2$;
- $f(4) = 3$.

Identifica o(s) máximo(s) e o(s) mínimo(s) de f, caso existam.

Parte II

1. Num determinado dia do mês de outubro, a temperatura T, em graus Celsius, variou de acordo com a seguinte função:

$$T(t) = -0,08t^2 + 2t + 6$$

sendo t o número de horas decorridas após as zero horas desse dia ($t \in [0, 24]$).
Utiliza a calculadora gráfica para responderes aos seguintes itens.

1.1. Qual é o valor da taxa de variação quando $t = 16$? Interpreta o valor obtido no contexto da situação descrita.

1.2. Determina a taxa de variação no instante a em que a temperatura é máxima.

1.3. Traça retas tangentes ao gráfico da função T, em pontos de abcissa pertencentes ao domínio da função (pontos de tangência), e completa a seguinte tabela:

x	0		a		24
Sinal da taxa de variação de g					
Monotonia de g					

1.4. Com base na tabela anterior, escreve os intervalos de monotonia da função T.

2. Durante um passeio pela serra, a Francisca observou uma águia num pinheiro. Quando se aproximou, a águia levantou voo. A altura h, em metros, da águia em relação ao solo, em função do tempo t, em segundos, desde que levantou voo, é dada por:

$$h(t) = t^3 - 10t^2 + 28t + 4$$

A Francisca conseguiu observar o voo da águia durante 7 segundos.

Utiliza a calculadora gráfica para responderes aos seguintes itens.

2.1. Determina a taxa média de variação da função h no intervalo $[0,\ 2]$. Interpreta o valor obtido no contexto apresentado.

2.2. Determina a taxa de variação da função h no instante inicial. Interpreta o valor obtido no contexto apresentado.

2.3. Durante o voo da águia verificou-se que existe um intervalo de tempo em que a taxa de variação da função é negativa. Identifica os extremos desse intervalo, justificando a tua resposta.

2.4. A Francisca chegou a casa e relatou o voo da águia à sua mãe. Elabora uma pequena descrição do voo da águia onde refiras os elementos recolhidos nos itens anteriores.

3. Uma rádio local fez uma emissão especial comemorativa do 25 de Abril de 1974, durante o dia 25 de abril de 2024. A emissão começou às 0 horas desse dia e durou 24 horas.

Durante a emissão, a temperatura ambiente no estúdio de rádio foi variando, por influência da climatização, do número de pessoas presentes e dos aparelhos eletrónicos em funcionamento, entre outros fatores.

Admite que, no estúdio:

- entre as 0 horas e as 10 horas, a temperatura ambiente esteve sempre a aumentar;
- durante toda a emissão, o valor máximo da temperatura ambiente ocorreu às 20 horas.

Seja f a função que faz corresponder o tempo, t, em horas, decorrido desde o início da emissão, ao valor da temperatura ambiente, em graus Celsius, no estúdio, no dia 25 de abril de 2024.

Seja V a função que dá a taxa de variação da função f para cada valor de t. Na figura seguinte, estão representados dois gráficos, A e B e assinalados os respetivos zeros, 10 e 20.

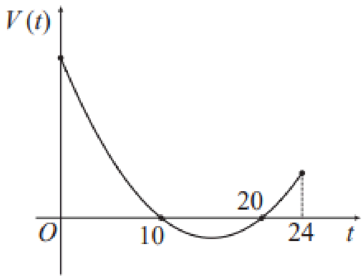


Gráfico A

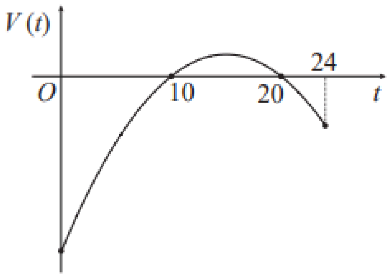


Gráfico B

Justifica que nem o gráfico A nem o gráfico B podem representar a função V. Apresenta uma razão para rejeitar cada um dos gráficos.

Adaptado de exame nacional de Matemática B, 2024 – 2.ª fase

Tarefa 4

Vamos otimizar

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Pretende-se que os alunos utilizem os conhecimentos adquiridos sobre taxa de variação na resolução de problemas de otimização.

Conhecimentos prévios dos alunos: Taxa média de variação. Taxa de variação. Relação entre a taxa de variação e a monotonia de uma função.

Materiais e recursos: Calculadora gráfica.

Notas e sugestões:

Sugere-se que a tarefa seja resolvida em pequenos grupos.

As conclusões deverão ser apresentadas e discutidas em grande grupo no final da tarefa ou, se se verificarem muitas dificuldades, no final de cada item.

Verificou-se alguma dificuldade por parte dos alunos para distinguirem a função original e a função taxa de variação, dificuldade que se veio a sentir na interpretação dos dados. Poderá haver a necessidade de o professor apoiar os alunos na interpretação dos enunciados. Os alunos também revelaram dificuldades no domínio da linguagem específica e nas justificações.

É importante o uso correto das unidades de medida, chamando a atenção dos alunos de que a unidade de medida da taxa de variação resulta das unidades de medida das variáveis independente e dependente da função original.

Nas turmas piloto, esta tarefa não foi aplicada da mesma forma em todas as turmas. Assim, em duas das turmas os alunos demonstraram autonomia e empenho e as professoras foram esclarecendo dúvidas e discutiram os resultados no final. Nas outras duas, as professoras sentiram a necessidade de ir resolvendo os itens, um a um, em grande grupo, de modo a que todos os alunos tivessem de participar.

Tarefa 4

Vamos otimizar

Como te deves ter apercebido, há situações em que temos de procurar otimizar a solução de um problema. Por exemplo, numa empresa de mobiliário, para maximizar o lucro obtido com a venda dos móveis, pode parecer que basta aumentar a sua produção. No entanto, esse aumento vai implicar também maiores custos. Assim, é necessário saber quanto se pode aumentar a produção para o lucro ser máximo.
Neste tópico vais estudar o importante contributo das taxas de variação no estudo de problemas em que importa maximizar ou minimizar funções em relação a uma variável.

1. O Rodrigo adora aviões e descobriu que a Força Aérea Portuguesa está a testar um novo avião na sua base em Beja. Os amigos decidiram então ir visitar Beja para assistir a esse teste. O teste durou exatamente 5 minutos.
   Seja A a função que dá a altitude do avião, em quilómetros, t minutos após o início do teste.
   Seja V a função que dá a taxa de variação da função A em cada instante t, definida por:

$$V(t) = 3t^2 - 14t + 10,\ 0 \leq t \leq 5$$

   1.1. Durante o teste, o avião atingiu uma **altitude máxima** e uma **altitude mínima**.

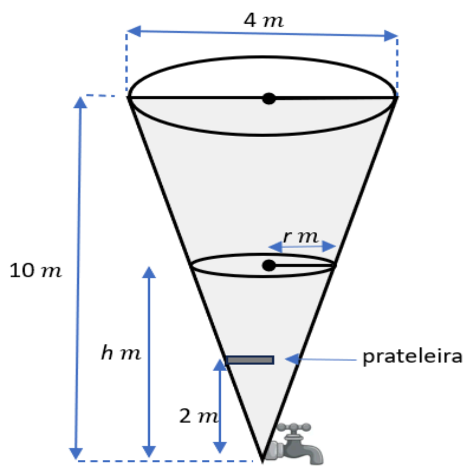
      1.1.1. Em que instantes ocorreram? Apresenta o resultado em minutos e segundos, com os segundos arredondados às unidades.
      Para responderes ao item, percorre as seguintes etapas:
      - Recorrendo à calculadora, obtém a representação gráfica de V, no contexto apresentado;
      - Constrói um quadro que relaciona o sinal da função V com a monotonia da função A;
      - Apresenta os valores pedidos.

      1.1.2. Consegues determinar essas altitudes? Justifica a tua resposta.

   1.2. Interpreta, no contexto descrito, o significado de

$$V(2) = -6 \quad \text{e de} \quad V(4,5) = 7,75$$

2. O Joaquim Aventureiro está na selva, à procura de uma esmeralda que pertence à tribo Quetzalcoatl e que foi roubada por uma outra tribo. O Joaquim descobriu que a tribo que roubou a esmeralda a escondeu num tanque com a forma de um cone invertido , como mostra o esquema ao lado. O cone tem 10 metros de altura e o diâmetro da base mede 4 metros. A esmeralda encontra-se numa prateleira. A tribo encheu, até ao cimo, o tanque com um líquido venenoso.



No fundo do tanque existe uma torneira que o permite esvaziar. Quando se abre a torneira, o líquido começa a sair de modo que a altura, h, em metros, do líquido no tanque é dada por:

$$h(t) = 10 + \frac{1}{1600}(t^3 - 1200t)$$

onde t (em minutos) é o tempo decorrido após a abertura da torneira até o tanque ficar vazio.

2.1. Determina o tempo que leva a esvaziar o tanque.

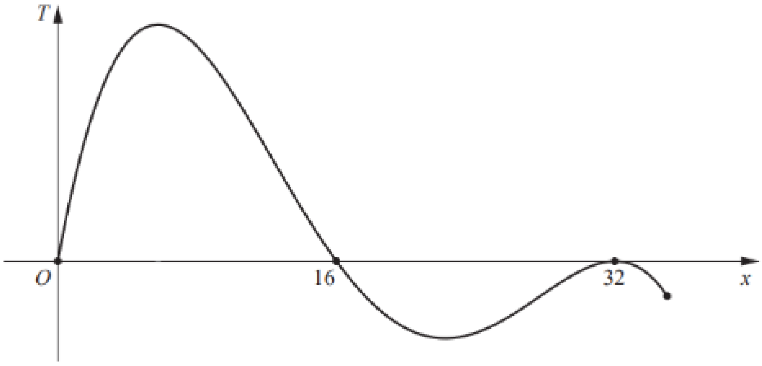
2.2. A prateleira onde se encontra a esmeralda está a 2 metros do vértice do cone. O Joaquim só pode entrar no tanque quando o líquido atingir a prateleira. Quanto tempo tem que esperar o Joaquim até conseguir entrar no tanque. Apresenta o resultado em minutos e segundos, com os segundos arredondados às unidades. Nos cálculos intermédios utiliza 3 casas decimais.
Sugestão: Utiliza a calculadora gráfica para resolver este item.

2.3. Calcula a taxa média de variação no intervalo $[2\,,\,10]$ indicando a sua unidade de medida.

2.4. Seja F a função que dá a taxa de variação da função h, para cada valor de t.
Interpreta no contexto do problema, o facto de $F(t) < 0$ para qualquer valor de $t \in [0\,,\,20]$.

3. O Tomé faz treinos de bicicleta, no ginásio, para se preparar para as provas de BTT em que participa. Seja T a função que dá a taxa de variação da velocidade registada na bicicleta do Tomé durante um desses treinos, x minutos após o seu início.

Na figura seguinte, apresenta-se a representação gráfica da função T, com $0 \leq x \leq 35$.



Tal como a figura ilustra, os zeros da função T são: 0, 16 e 32.

Em que instante é que a velocidade foi máxima durante esse treino? Justifica a tua resposta.

Sugestão: Para resolveres este item deverás percorrer as seguintes etapas:

- Construir a tabela que relaciona o sinal da função T com a monotonia da função V, velocidade registada na bicicleta do Tomé durante o treino, x minutos após o seu início;
- Determinar o instante, x, em que a velocidade, V, foi máxima.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática B, 2022, 2.ª fase

TAREFA 5

Modelar para otimizar

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Nesta tarefa os alunos terão que modelar as situações apresentadas e determinar as soluções ótimas dos problemas apresentados.

Conhecimentos prévios dos alunos: Regressão associada a funções polinomiais. Taxa média de variação e taxa de variação. Utilização da calculadora gráfica.

Materiais e recursos: Equipamento digital com acesso à internet. Calculadora gráfica.

Notas e sugestões:

Esta tarefa deverá ser resolvida em pequenos grupos.

As conclusões dos itens 1 e 2 deverão ser apresentadas e discutidas em grande grupo antes dos alunos resolverem os itens 3 e 4. No final destes últimos, as conclusões também deverão ser apresentadas e discutidas por todos os alunos da turma.

Nos itens 1 e 2, pretende-se que os alunos recorram à regressão para encontrarem os modelos que melhor se ajustem às situações apresentadas. Nesta fase, os alunos poderão ter a tendência de só utilizarem a regressão linear, pelo que o professor poderá sugerir-lhes outro tipo de regressões.

Os itens 3 e 4, poderão ser mais complicados para os alunos uma vez que terão de modelar as situações analiticamente.

No item 3, existe o recurso a uma apliqueta para ajudar a visualização e a compreensão da situação apresentada. Neste item, apesar de a resolução estar orientada, é provável que surjam algumas dificuldades.

No item 4.1, pode haver a necessidade de orientar mais o trabalho dos alunos. Neste caso, sugerem-se as etapas como:

- justificar que $(x - 1)$ representa a medida do lado da tapeçaria, paralelo ao lado do mural de comprimento x;
- justificar que $(13 - x)$ representa a medida do outro lado do mural;
- justificar que $(11 - x)$ representa a medida do outro lado da tapeçaria, paralelo ao lado do mural de comprimento $(13 - x)$.

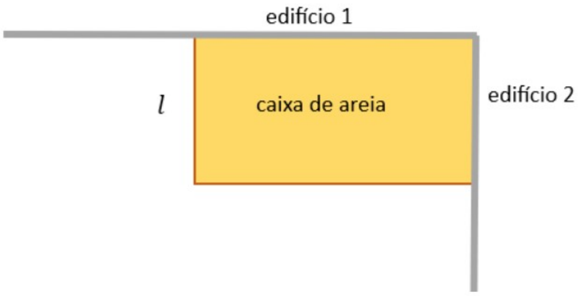
Poderá haver a necessidade, nalgumas turmas, de o professor apoiar na interpretação dos enunciados e na orientação e desenvolvimento da tarefa, especialmente na obtenção das regressões na calculadora gráfica e também no trabalho analítico que permitiu a modelação das várias situações propostas
A ajuda do professor poderá igualmente ser requerida na elaboração das justificações, na medida em que se pretende a utilização de linguagem específica e a redação de pequenos textos envolvendo a comunicação matemática.

TAREFA 5

Modelar para otimizar

Nos problemas de otimização, nem sempre tens a expressão que te permite determinar a taxa de variação. Nesta tarefa, deverás modelar as situações apresentadas de modo a obteres respostas aos problemas que te são colocados.

1. Os funcionários de uma creche pretendem construir uma caixa de areia de formato retangular para as crianças brincarem. Um dos funcionários apenas comprou 20 metros de madeira para construir a caixa. Pretende construí-la num canto formado por dois edifícios pertencentes à creche, como se pode ver na figura seguinte.



Considera l, em metros, a largura da caixa de areia.

1.1. Justifica que $l \in \,]0, 20[$.

1.2. Recorre à apliqueta https://www.geogebra.org/m/eycrrdsz e completa a tabela seguinte, com os valores indicados para l (movimenta o seletor).

l (largura)	1	5	8	12	18
$A(l)$ (área)					

1.3. Qual é o tipo de função que modela a área da caixa de areia, A, em função da sua largura, l ?

1.4. Recorre à calculadora gráfica e, usando o modelo de regressão adequado, encontra uma expressão analítica que possa definir a função A.

1.5. Utiliza o modelo encontrado no item anterior para determinar o valor de l, com $l \in]0, 20[$, para o qual a área é máxima. Indica as dimensões da caixa de área máxima.

2. Um supermercado está aberto entre as 10h e as 18h30min. Num certo dia, selecionaram-se cinco momentos para fazer o levantamento do número de clientes no supermercado. Os resultados encontram-se registados na tabela seguinte:

Hora (x)	10	12	14	16	18
N.º de clientes (N)	72	25	56	117	169

2.1. Determina a variação do número de clientes entre as 12 e as 16 horas.

2.2. No contexto apresentado, qual é o significado da expressão $\frac{N(18)-N(12)}{18-12}$?

2.3. Um modelo matemático que se ajusta bem à nuvem de pontos correspondente ao número N de clientes presentes no supermercado, em função de x (hora do dia), é da forma $N(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Recorrendo a uma calculadora gráfica:

2.3.1. Representa a nuvem de pontos que relaciona as variáveis Hora e N.º de clientes.

2.3.2. Determina as constantes a, b, c e d arredondadas às centésimas e escreve a expressão de $N(x)$ obtida.

Utiliza o modelo encontrado e responde aos seguintes itens.

2.4. Estima o número de clientes existentes no interior do supermercado uma hora após a abertura.

2.5. Existem dois momentos, durante o tempo em que o supermercado está aberto nesse dia, em que o número de clientes é igual a 60.
Com a ajuda da calculadora, determina-os e apresenta os resultados pedidos em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.

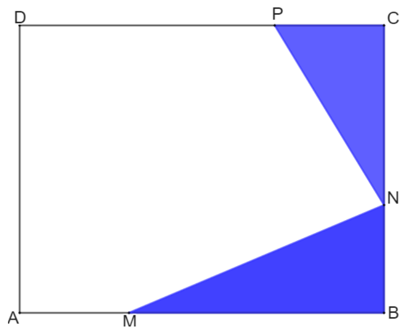
2.6. Recorrendo à calculadora gráfica, determina:

2.6.1. a taxa de variação da função às 16 horas.

2.6.2. o momento do dia em que o número de clientes foi mínimo.
Apresenta esse momento em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.

2.7. O gerente do supermercado tenciona prolongar o horário de abertura do supermercado até às 22 horas. Será que é ou não vantajoso manter o supermercado aberto entre as $18{:}30$ e as 22 horas?
Discute com os teus colegas e justifica a tua resposta.

3. A Luísa pretende pintar um quadro sobre uma tela de formato retangular, com 40 centímetros de comprimento e 32 centímetros de largura. A Luísa imaginou, no seu quadro, dois triângulos azuis, como sugere a figura ao lado.



Seja $[ABCD]$ o retângulo que representa essa tela. A construção dos triângulos deve ser feita da seguinte forma:

- Sobre o lado $[AB]$, marca-se um ponto M;
- Sobre o lado $[BC]$, marca-se um ponto N;
- Sobre o lado $[CD]$, marca-se um ponto P;
- Os pontos M, N e P não coincidem com os vértices do retângulo;
- $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = x$.

O objetivo da Luísa é encontrar a posição do ponto N no segmento de reta $[BC]$ (ou, de forma equivalente, o valor de x) de modo que a área da região azul seja máxima.

Acede à seguinte apliqueta https://www.geogebra.org/m/pmtz2s4x e altera a posição do ponto N para visualizares diferentes configurações do quadro da Luísa.

Segue os seguintes passos e determina o valor de x que maximiza a área azul:

a) Justifica que $x \in]0, 32[$;

b) Justifica que $\overline{BM} = 40 - x$;

c) Exprime $\overline{CN}$ em função de x ;

d) Mostra que a área do triângulo $[BMN]$ é igual a $\frac{40x-x^2}{2}$;

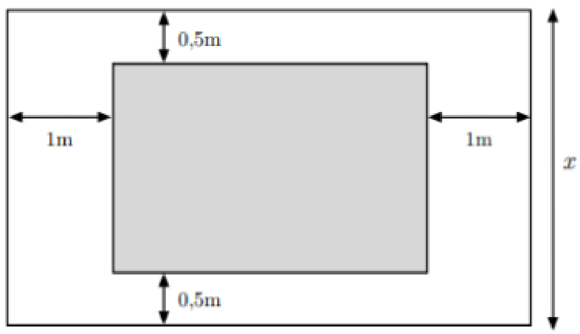
e) Mostra que a área do triângulo $[PCN]$ é igual a $\frac{32x-x^2}{2}$;

f) Mostra que a função f que dá a área da região colorida em função de x, pode ser definida por $f(x) = 36x - x^2$;

g) Recorre à calculadora gráfica e determina a solução do problema, ou seja, para que valor de x é que a área da região azul é máxima.

4. Numa vila, o presidente da Junta de Freguesia vai inaugurar um mural retangular na praça principal. Nesse mural, será exposta uma tapeçaria.

No projeto, ilustrado na figura ao lado, o mural está representado pelo retângulo maior, e a tapeçaria pelo retângulo menor, sombreado; x representa a medida, em metros, de um dos lados do mural.



Cada um dos lados da tapeçaria ficará paralela a dois dos lados do mural, com margens de 0,5 metros e de 1 metro, como se ilustra na figura.

O mural terá 26 metros de perímetro.

4.1. Mostra que as medidas, em metros, de dois lados não paralelos da tapeçaria, expressas em função de x, com $x \in \ ]1, 11[$, são dadas por $x - 1$ e $11 - x$;

4.2. Mostra que a área da tapeçaria, A, em metros quadrados, em função de x, é dada por:

$$A(x) = -x^2 + 12x - 11, \quad x \in]1, 11[.$$

4.3. Determina o valor de x, com $x \in \ ]1, 11[$, para o qual a área da tapeçaria é máxima.

Adaptado de Exame Nacional de Matemática B, 2009, 2.ªFase