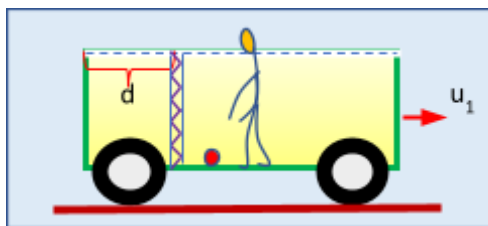


Εκτοξευτήρας εν δράσει...



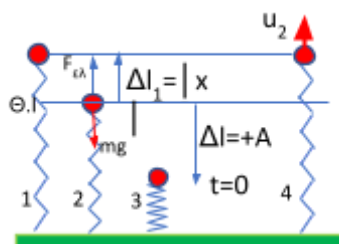
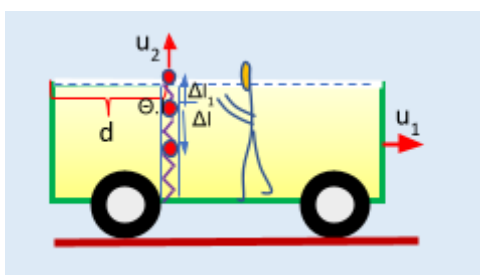
Στην εικόνα βλέπεται ένα αμαξίδιο άνευ μηχανής ολικής μάζας $M=10\text{ Kg}$ μαζί με το περιεχόμενό του, που κινείται με σταθερή ταχύτητα $u_1=8\text{ m/s}$ σε οριζόντιο επίπεδο, ενώ στο δάπεδό του ο πειραματιστής έχει σταθεροποιήσει με το ένα άκρο του, ένα ιδανικό ελατήριο σταθερής $k=200\text{ N/m}$, που στην εικόνα το βλέπετε στο φυσικό μήκος του και η οριζόντια απόσταση του πάνω άκρου του από το πίσω τοίχωμα του αμαξιδίου είναι $d=0,7\text{ m}$. Κάποια στιγμή πιάνει μια σφαίρα μάζας $m=2\text{ Kg}$ από το δάπεδο, την τοποθετεί στο πάνω άκρο του ελατηρίου φέρνοντάς την στη θέση ισορροπίας της, ενώ στη συνέχεια πιέζοντας προς τα κάτω προκαλεί επιπλέον συμπίεση στο ελατήριο κατά $\Delta l=0,2\text{ m}$ και αφήνει ελεύθερο το σύστημα σώμα-ελατήριο την $t_0=0$. Η σφαίρα εκτοξεύεται ενώ το αμαξίδιο συνεχίζει ευθύγραμμο στον οριζόντιο δρόμο.

- 1) Να υπολογίσετε την ταχύτητα της σφαίρας τη στιγμή που χάνεται η επαφή με το ελατήριο, για τον πειραματιστή.
- 2) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του αμαξιδίου αμέσως μετά την εκτόξευση της σφαίρας.
- 3) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_2 που η σφαίρα θα επιστρέψει στο οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το φυσικό μήκος του ελατηρίου.
- 4) Να εξετάσετε αν η σφαίρα πέσει στο αμαξίδιο και σε ποιο σημείο του.
- 5) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας στην κατακόρυφη διεύθυνση σε σχέση με το χρόνο από την $t=0$ έως την t_2 , θεωρώντας θετική τη φορά προς τα πάνω.

Δίδεται : $|g|=10\text{ m/s}^2$, $\sqrt{3} \approx 1,73$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- 1) Δηλώνω ότι στο σχήμα ο πειραματιστής στο αμαξίδιο δηλώνει απλά την ύπαρξή του χωρίς αντιστοιχία διαστάσεων με τα υπόλοιπα μέρη



Δεξιά απομόνωσα το σύστημα ελατήριο- m και ότι αφορά αυτό.

Στη θέση ισορροπίας: $|F_{ελ}| = mg \Rightarrow k\Delta l_1 = mg \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{mg}{k} = \frac{20}{200} \Rightarrow \Delta l_1 = 0,1\text{ m}$

Θεωρώ το ελατήριο - σφαίρα αρμονικό ταλ/τη με $D=k=200\text{N/m}$ και πλάτος $A=\Delta l=0,2\text{m}$, οπότε στη θέση (4) όπου η απομάκρυνση είναι $x=-0,1\text{m}$ και η σφαίρα χάνει την επαφή της με το ελατήριο που δεν μπορεί να επιμηκυνθεί πέραν του φυσικού μήκους του, αφού «ιδανικό» σημαίνει και αμελητέας μάζας άρα αμελητέας αδράνειας, θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mu_2^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow 200 \cdot 0,1^2 + 2 \cdot u_2^2 = 200 \cdot 0,2^2 \Rightarrow 2 + 2 \cdot u_2^2 = 8 \Rightarrow$$

$$u_2 = \pm\sqrt{3} \text{ m/s και σ μύφωνα με ήην δεδομ νη προσ μανση, } u_2 = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

Αυτή είναι η ταχύτητα της σφαίρας για τον πειραματιστή ο οποίος προφανώς μετέχει της κίνησης του αμαξιδίου. Αν ο παρατηρητής είναι ακίνητος εκτός του αμαξιδίου η σφαίρα θα είχε και την ταχύτητα του αμαξιδίου u_1 .

Άλλος τρόπος παρακάμπτοντας τον ταλαντωτή είναι η εφαρμογή της ΑΔΕμ στις θέσεις (3) και (4) με στάθμη αναφοράς την θέση της σφαίρας στην (4):

$$\frac{1}{2}k(\Delta l + \Delta l_1)^2 = \frac{1}{2}mu_2^2 + mg(\Delta l + \Delta l_1) \Rightarrow 100 \cdot 0,3^2 = u_2^2 + 2 \cdot 10 \cdot 0,3 \Rightarrow 9 = u_2^2 + 6 \Rightarrow u_2 = \pm\sqrt{3} \text{ m/s} \Rightarrow u_2 = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

2) Εφαρμόζω την ΑΔΟρμής στον άξονα κίνησης του αμαξιδίου καθ' όσον στη διεύθυνση αυτή $\Sigma F_{\varepsilon\zeta}=0$ και θα έχω:

$$M \cdot u_1 = (M - m)V + mu_1 \Rightarrow (M - m)u_1 = (M - m)V \Rightarrow V = u_1 = 8\text{ m/s}$$

3) Βρίσκουμε πρώτα την αρχική φάση για τον ταλαντωτή

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{\text{για } t=0, x=-A} \eta\mu\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = 3\pi/2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = \sqrt{100} \Rightarrow \omega = 10\text{ rad/s}$$

Η γωνιακή συχνότητα :

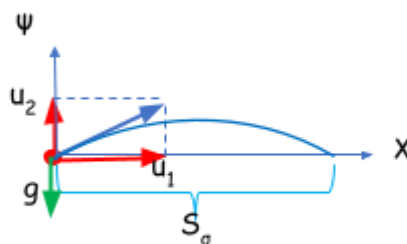
$$x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι :

$$\xrightarrow{x=0,1} \eta\mu\left(10t_2 + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow 10t_1 + \frac{3\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\kappa=1} 10t_1 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{2\pi}{30}\text{ s}$$

είναι η χρονική στιγμή που η σφαίρα εγκαταλείπει το ελατήριο.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη βολή της σφαίρα



Θεωρώ σύστημα αξόνων χ, ψ με τον χ στο επίπεδο του φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Μελετώντας τη βολή της σφαίρας στο σύστημα χ, ψ έχουμε για τον άξονα ψ :

$$\psi = u_2 \cdot (t - t_1) + \frac{1}{2} g (t - t_1)^2 \xrightarrow{\psi=0 \text{ \& } (t-t_1) \neq 0} t_2 - t_1 = -\frac{2 \cdot u_2}{g} = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{-10} \Rightarrow$$

$$t_2 = t_1 + 0,2\sqrt{3} \Rightarrow t_2 = \frac{2\pi}{30} + 0,2 \cdot 1,73 = 0,21 + 0,346 \Rightarrow t_2 = 0,556s$$

$t_2 = 0,556s$ είναι η χρονική στιγμή που η σφαίρα φτάνει στο επίπεδο που διέρχεται από το φυσικό μήκος του ελατηρίου.

4) Η πτήση της σφαίρας από τη στιγμή που εγκαταλείπει το ελατήριο και μέχρι να φτάσει στο επίπεδο που διέρχεται από το φυσικό μήκος του ελατηρίου διαρκεί χρόνο

$$\psi = u_2 \cdot (t - t_1) + \frac{1}{2} g (t - t_1)^2 \xrightarrow{\psi=0 \text{ \& } t-t_1=\Delta t_3}$$

$$\Delta t_3 = -\frac{2 \cdot u_2}{g} = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{-10} \Rightarrow \Delta t_3 = 0,2 \cdot \sqrt{3} s$$

t_3 ο οποίος βρίσκεται από την

Στον άξονα χ για τη σφαίρα μετά την εγκατάλειψη του ελατηρίου έχουμε:

$$x = u_1 \cdot t \xrightarrow{t=0,2\sqrt{3}} S_\sigma = 8 \cdot 0,2\sqrt{3} \Rightarrow S_\sigma = 1,6\sqrt{3} m$$

Το αμαξίδιο στον ίδιο χρόνο με την ταχύτητα $V=u_1$ που διατήρησε μετά την εκτόξευση της σφαίρας ,θα έχει διανύσει απόσταση:

$$S_a = V \cdot t \xrightarrow{t=0,2\sqrt{3}} S_a = 1,6\sqrt{3}m / s = S_\sigma$$

Το αμαξίδιο λοιπόν έχει διανύσει ίδια απόσταση με την οριζόντια μετατόπιση της σφαίρας στον ίδιο χρόνο:

άρα η σφαίρα θα πέσει μέσα στο αμαξίδιο και μάλιστα ακριβώς στη θέση που εκτοξεύθηκε από το ελατήριο.

5)Θα βρούμε πρώτα την εξίσωση της ταχύτητας της σφαίρας από την $t=0$ μέχρι τη χρονική στιγμή που εγκαταλείπει το ελατήριο και μέχρι τότε εκτελούσε α.α.τ με

εξίσωση θέσης :

$$x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right)(SI)$$

Η εξίσωση της ταχύτητας από την $t=0$ μέχρι την $t_1 = \frac{2\pi}{30} s$ είναι:

$$u = \omega A \sin(\omega t + \phi_0) = 10 \cdot 0,2 \sin\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow u = 2 \sin\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) (SI)$$

$$\xrightarrow{t=t_1=\frac{2\pi}{30}} u_2 = 2 \sin\left(10 \frac{2\pi}{30} + \frac{3\pi}{2}\right) = 2 \sin\frac{13\pi}{6} = 2 \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

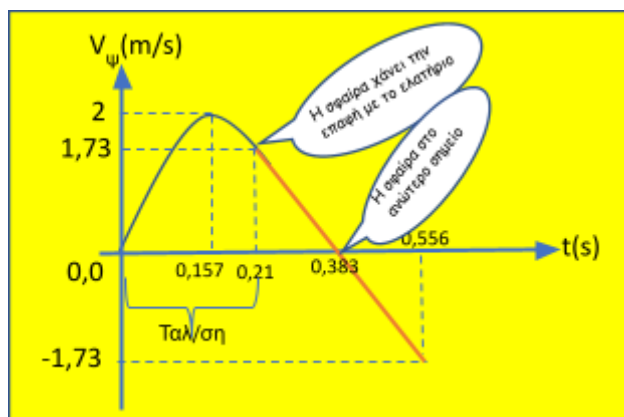
$$u_2 = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow u_2 = \sqrt{3} m/s$$

(Την βρήκαμε και έτσι την u_2 .)

Μετά την $t_1 = \frac{2\pi}{30} s$ και μέχρι την $t_2 = 0,556 s$ η σφαίρα εκτελεί στον Ψ, κατακόρυφη βολή προς τα πάνω και η ταχύτητά της θα δίδεται από τη σχέση:

$$v_\psi = u_2 - g(t - t_1) \Rightarrow v_\psi = \sqrt{3} - 10\left(t - \frac{2\pi}{30}\right) \Rightarrow v_\psi = 1,73 + \frac{2\pi}{3} - 10t \Rightarrow$$

$$v_\psi = 3,83 - 10t (SI)$$



Σχόλιο

Μετά την επιστροφή της σφαίρας στη θέση που βλήθηκε αντιλαμβανόμαστε τι πρόκειται να ακολουθήσει, μια και η οριζόντια ταχύτητα της σφαίρας παραμένει ίδια με του αμαξιδίου...

Παντελεήμων Παπαδάκης

21/11/2021