

Тверь
2000 год

Введение

Лишь в редких случаях цели, которые лицо принимающее решение (ЛПР) стремится достичь в планируемой им операции, удается описать с помощью одного количественного показателя. Поэтому специалисты Системного анализа и Исследования операций считают целесообразным избегать термина «оптимизация», так как поиск оптимального решения x , доставляющего функции $F(x)$ экстремальное значение, имеет вполне определенный смысл и давно входит в арсенал основных понятий математики. Многообразие целей ЛПР более адекватно может быть описано с помощью некоторой совокупности частных критериев (ϵ -критериев), характеризующих степень достижения частных целей. Противоречивый характер целей обуславливает, как правило, и противоречивость ϵ -критериев. С формальной точки зрения это приводит к тому, что свои экстремальные значения ϵ -критерии получают в различных точках ОДР D_x . Следовательно, ЛПР принимая решение x всегда должно идти на компромисс, в разумных пределах допуская ухудшение значений одних ϵ -критериев во имя улучшения значений других. Именно этот этап творческой деятельности ЛПР наименее формализуем и требует привлечения предыдущего опыта, интуиции и даже искусства ЛПР, обладающего практическим опытом в соответствующей предметной области. Решение, принимаемое ЛПР с привлечением совокупности ϵ -критериев, будем называть компромиссным, рациональным или просто решением ЛПР, избегая при этом термина «оптимальный», имеющего определенный и вполне точный смысл.

Основная идея обоснования и принятия решения ЛПР в условиях многокритериальности состоит в последовательном сужении ОДР D_x до минимальных размеров, что облегчает принятие окончательного решения ЛПР. Первым, наиболее существенным шагом в этом направлении будет являться сужение ОДР D_x до некоторого подмножества $D_x^{\pi} \subset D_x$ на основании принципа доминирования.

1. Общая постановка многокритериальной задачи линейного программирования.

Формальная постановка многокритериальной задачи линейного программирования.

Формальная схема многокритериальной ЗЛП (МЗЛП) от обычной ЗЛП отличается наличием нескольких целевых функций:

$$(1) \quad L^r(x) = \sum_{j=1}^n c_j^r \cdot x_j + c_0^r \rightarrow \max_x, \quad r = \overline{1; R},$$

где ϵ_i – неотрицательные переменные (невязки, $i = \overline{1; m}$).

$$(2) \quad D_x \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq -b_i, \Rightarrow \epsilon_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i, i = \overline{1; m}, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1; n}, \end{cases}$$

Знак \max означает тот факт, что желательно увеличение каждой из линейных форм $L^r(x)$, отражающей некоторую r -ю цель ЛРП.

Требование только максимизации не сужает общности задачи. Так, например, требование минимизации затрат

некоторых ресурсов эквивалентно требованию максимизации остатка от изначально выделенных ресурсов. Наличие многих ϵ -критериев позволяет сделать модель (1) – (3) более адекватной изучаемой ситуации, однако выводит её из класса задач МП и требует разработки новых способов ее анализа. Начальный анализ МЗЛП состоит в

удалении из области допустимых решений (ОДР) D_x явно худших, доминируемых решений x . Решение x' доминирует решение x ($x' > x$), если при x' хотя бы один ч-критерий имеет больше значение при равенстве остальных. Поэтому решение x может быть исключено из дальнейшего рассмотрения, как явно худшее, чем x' . Если решение x' не доминируется ни одним из решений $x \in D_x$, то его называют Паретто-оптимальным (П - оптимальным) или эффективным решением (П - решением). Таким образом, П-решение - это неулучшаемое (недоминируемое) решение, и ясно, что решение ЛПР должно обладать этим свойством – другие решения нет смысла рассматривать. Формальное определение П-оптимальности решения x' записывается как требование об отсутствии такого решения $x \in D_x$, при котором бы были выполнены условия

$$L^r(x) \geq L^r(x'), \forall r, \quad (4)$$

и хотя бы одно из них – строго (со знаком $>$).

Иными словами, условия (4) выражают требование невозможности улучшения решения x' в пределах ОДР D_x ни по одному ч-критерию без ухудшения хотя бы по одному из других.

Условие задачи

Даны целевые функции:

$$L_1 = -x_1 + 2x_2 + 2,$$

$$L_2 = x_1 + x_2 + 4,$$

$$L_3 = x_1 - 4x_2 + 20,$$

и система ограничений:

$$x_1 + x_2 \leq 15,$$

$$5x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$-x_1 + x_2 \leq 5,$$

$$x_2 \leq 20,$$

$$\forall x_j \geq 0.$$

2. Решение многокритериальной задачи линейного программирования графическим методом.

Формальное условие и сведение к ЗЛП

Чтобы можно было проверить условие (4) ($L^r(x) \geq L^r(x'), \forall r$) для некоторой произвольно взятой точки x , не прибегая к попарному сравнению с другими, условие П-оптимальности (4) переформулируем в виде следующей задачи линейного программирования:

$$\delta^r = L^r(x) - L^r(x') = \sum_{j=1}^n c_j^r x_j - \sum c_j x_j', \forall \delta^r, \quad (5)$$

$$\Delta = \Delta(x) = \sum_{r=1}^R \delta^r \rightarrow \max_x, \quad (6)$$

$$x \in D_x, \forall x_j \geq 0. \quad (7)$$

Смысл задачи линейного программирования нетрудно понять, если учесть, что δ^r – это приращение ч-критерия L^r , получаемое при смещении решения x^* в точку x . Тогда, если после решения ЗЛП окажется $\Delta_{\max} = 0$, то это будет означать, что ни один из ч-критериев нельзя увеличить ($\Delta_{\max} = 0$), если не допускать уменьшения любого из других ($\forall \delta^r \geq 0$). Но это и есть условие п-оптимальности x^* . Если же при решении окажется, что $\Delta \geq 0$, то значит какой-то ч-критерий увеличил свое значение без ухудшения значений других ($\forall \delta^r \geq 0$), и значит $x^* \notin D_x^p$.

Теперь перейдем к решению нашей задачи:

$$\begin{aligned} L_1 &= -x_1 + 2x_2 + 2, \\ L_2 &= x_1 + x_2 + 4, \\ L_3 &= x_1 - 4x_2 + 20, \\ x_1 + x_2 &\leq 15, \\ 5x_1 + x_2 &\geq 1, \\ -x_1 + x_2 &\leq 5, \\ x_2 &\leq 20, \\ \forall x_j &\geq 0. \end{aligned}$$

Проверим некоторую точку $x^* = (5; 3)$ (эта точка принадлежит области D_x) на предмет п-оптимальности:

Запишем ЗЛП в каноническом виде:

$$D_x^k \quad \begin{cases} \delta^1 = x_1 - 2x_2 + 1 \\ \delta^2 = x_1 + x_2 - 8 \\ \delta^3 = -x_1 + 4x_2 - 7 \\ \Delta = x_1 + 3x_2 - 14, \end{cases}$$

$$D_x \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = 15 - x_1 - x_2 \\ \varepsilon_2 = 5x_1 + x_2 - 1, \\ \varepsilon_3 = 5 + x_1 - x_2 \\ \varepsilon_4 = 20 - x_2 \\ \forall x_j \geq 0. \end{cases}$$

и в форме с-таблицы:

T_1	x_1	x_2	1
ε_1	-1	-1	16
ε_2	5	1	-4
ε_3	1	-1	100
ε_4	0	-1	10
δ^1	1	-2	-4
δ^2	1	1	-12
δ^3	-1	1	-8
Δ	1	4	-24

Применяя с-метод, после замены $\delta^3 \leftrightarrow x_2$, получаем:

T_2	x_1	δ^1	1
ε_1	-3/2	S	29/2

ϵ_2	11/2	-1/2	-1/2
ϵ_3	1/2	S	9/2
ϵ_4	-1/2	S	39/2
X_2	1/2	-1/2	1/2
δ^2	3/2	-1/2	-15/2
δ^3	1	-2	-5
Δ	5/2	-3/2	-25/2

Видим, что опорный план не получен, следовательно делаем еще одну замену: $\epsilon_1 \leftrightarrow x_1$:

T_3	ϵ_3	δ^1	1
x_1			29/3
ϵ_2			316/6
ϵ_3			56/6
ϵ_4			88/6
x_2			16/3
δ^2			7
δ^3			14/3
Δ	-5/3	-2/3	70/6

В T_3 получен опорный план. Так как при этом $\Delta > 0$, то, следовательно, система ч-критериев не противоречива и существует некоторая область, смещение в которую решения x способно увеличить, по крайней мере, один ч-критерий без уменьшения значений остальных. Эта область и есть конус доминирования - д-конусом D_x^k (на рисунке выделен штриховкой). При $R > n$ д-конус может вырождаться в точку x (вершина д-конуса). Получено целое множество оптимальных решений, извлекаемое из T_3 : $x^0 = (29/3; 16/3)$. Таким образом, решение $x = (5; 3)$ не является п-оптимальным, так как его удалось улучшить ($\Delta_{\max} > 0$). Помимо установления факта неэффективности решения x , рассмотренный метод позволил определить ближайшее к нему п-оптимальное решение.

Графическое определение п-множества

Сначала необходимо построить график.

Для построения графика необходимы следующие данные:

исходные данные:

$$L_1 = x_1 - 2x_2 + 2,$$

$$L_2 = x_1 + x_2 + 4,$$

$$L_3 = -x_1 + 4x_2 - 20,$$

в каноническом виде (после подстановки точки (5;3))

$$D_x^k \begin{cases} \delta^1 = x_1 - 2x_2 + 1, & (5 - 2 \cdot 3 + 1 = 1) \\ \delta^2 = x_1 + x_2 - 8, & (5 + 3 + 4 = 12) \\ \delta^3 = -x_1 + 4x_2 - 7, & (-5 + 4 \cdot 3 - 20 = -13) \\ \Delta = 2x_1 + 4x_2 - 14, \end{cases}$$

Находим точки для построения прямых:

$$\begin{aligned} \delta^1 &= x_1 - 2x_2 + 1, \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 1 \quad (1;1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^2 &= x_1 + x_2 - 8, \\ x_1 + x_2 &\geq 8 \quad (0;8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^3 &= -x_1 + 4x_2 - 7, \\ -x_1 + 4x_2 &\geq 7 \quad (1;2) \end{aligned}$$

По полученным точкам строим график (рисунок 1). На рисунке штриховкой показан полученный д-конус. Переход к любой точке внутри конуса обеспечивает увеличение всех критериев. Точка (29/3; 16/3) является П-оптимальным решением. Смещая точку x внутрь д-конуса придем на границу ϵ_1 . При этом д-конус выйдет из области допустимых решений (ОДР) D_x . Теперь полученная точка не сможет улучшить ни один ч-критерий без ухудшения других, значит она П-оптимальная. Построив д-конус в любой точке стороны ϵ_1 , убеждаемся, что каждая из точек П-оптимальна, значит вся сторона ϵ_1 составляет П-множество.

3.Определение Парето-оптимального множества с-методом

Удаление пассивных ограничений

Перед построением П-множества из системы ограничений должны быть удалены пассивные ограничения. Пассивным будем называть неравенство (п-неравенство), граница которого не является частью границ области D_x , за исключением, может быть, ее отдельной точки. Неравенства, образующие границы D_x , назовем активными (а-неравенства).

Чтобы грани не были включены в $D_x^П$, не имея никакого отношения к $D_x^П$, неравенство ϵ_1 должно быть удалено из исходной системы ограничений. Условием для исключения неравенства $\epsilon_i \geq 0$ из системы является несовместность (или вырожденность) данной системы неравенств при условии $\epsilon_i = 0$. Геометрически это означает, что граница $\epsilon_i = 0$ неравенства $\epsilon_i \geq 0$ не пересекается с областью D_x или имеет одну общую точку. Если граница $\epsilon_i = 0$ имеет общую угловую точку с D_x (вырожденность), то с удалением п-неравенства $\epsilon_i \geq 0$ эта точка не будет утеряна, так как она входит в границы других неравенств. Помимо заданных m неравенств проверке подлежат и n условий неотрицательности переменных, так как координатные плоскости (оси) также могут входить в границы D_x .

В качестве примечания можно отметить, что поскольку п-неравенства (пассивные неравенства) для любой точки $x \in D_x$ будут выполнены, то по мере выявления п-неравенств и введения их в базис они удаляются из с-таблицы.

Запишем систему неравенств D_x в форме с-таблицы:

T_1	x_1	x_2	1	b_i/a_{is}	b_i/a_{is}
ϵ_1	-1	-1	15	15	15
ϵ_2	5	1	-1	1/5	1
ϵ_3	1	-1	5	-	5
ϵ_4	0	-1	20	-	20

T_2	ϵ_1	x_2	1
x_1	-1	-1	15
ϵ_2	-5	-4	74
ϵ_3	-1	-2	20
ϵ_4	0	-1	20

T_2'	x_1	ϵ_2	1
ϵ_1	4	-1	14
x_2	-5	1	1
ϵ_3	2	-1	4
ϵ_4	1	-1	19

ОП – получен, следовательно

x_2 и ϵ_1 – активные ограничения;

ОП – получен, следовательно

x_1 и ϵ_2 – активные ограничения;

из T_2 получаем:

T_3	ϵ_1	ϵ_3	1
x_1	1	1/2	5
ϵ_2	-3	2	34
x_2	-1/2	-1/2	10
ϵ_4	2	S	10

отсюда делаем вывод, что ϵ_3 – активное ограничение;

из T_3 получаем:

T_4	ϵ_4	ϵ_3	1
x_1			10
ϵ_2			19
x_2			15/2
ϵ_1			-5

Опорный план не получен, следовательно ϵ_4 – пассивное ограничение.

Определение π -множества s -методом.

При подготовке решения для ЛПР интерес будет представлять информация обо всем множестве π -оптимальных (эффективных) решений D_x^π . Графический метод позволяет сформулировать довольно простой подход к определению множества D_x^π . Суть этого подхода в следующем. Решая усеченную задачу линейного программирования, устанавливаем факт существования д-конуса ($\Delta_{\max} > 0$). Поскольку для линейных ЦФ конфигурация д-конуса не зависит от положения его вершины x^* , то, помещая ее на границу ϵ_i области D_x , решаем усеченную ЗЛП с добавлением ϵ_i , соответствующего i -му участку границ D_x . Вырождение д-конуса в точку x^* будет признаком π -оптимальности и всех других точек данной грани. С помощью s -метода указанная процедура легко продельвается для пространства любой размерности n . Неудобство указанного метода состоит в том, что потребуются на каждой грани ОДР D_x найти точку x^* (по числу граней D_x) сформулировать и решить столько же ЗЛП размера $R \times n$.

Существенно сократить объем вычислений можно путем выбора вершины д-конуса в фиксированной точке $x^* = (1)_n$ и в нее же параллельно себе перенести грани, составляющие границы D_x .

Приведенные к точке $x^* = (1)_n$ приращения $\bar{\delta}^r$ и невязки $\bar{\epsilon}_i$ запишутся в виде:

$$\bar{\delta}^{-r} = \sum_{j=1}^n c_j^r x_j - \sum_j c_j^r, \forall r; \bar{\epsilon}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \sum_j a_{ij}, \forall i; \bar{\Delta} = \sum_r \bar{\delta}^r, \quad (8)$$

где черта сверху у $\bar{\delta}$, $\bar{\epsilon}$ и $\bar{\Delta}$ означает, что эти величины приведены к точке $x^* = (1)_n$. По существу, (8) – ЗЛП размера $(R+m) \times n$ ($\bar{\Delta} \rightarrow \max$), а ее решение позволит найти все грани, составляющие π -множество D_x^π .

Составляем s -таблицу, не учитывая пассивные ограничения, т.е. ϵ_1 :

T_1	x_1	x_2	1
ϵ_2	-1	-1	2
ϵ_3	5	1	-6
ϵ_4	1	-1	0

x_1	1	0	-1
x_2	0	1	-1
δ^1	1	-2	1
δ^2	1	1	-2
δ^3	-1	4	-3
Δ		3	-4
	1		

В начале решается усеченная ЗЛП (под чертой):

T_2	x_1	δ^1	1
ε_1	-3/2	1/2	3/2
ε_2	11/2	-1/2	-11/2
ε_3	1/2	1/2	-1/2
x_1	1	0	-1
x_2	1/2	-1/2	-1/2
x_2	1/2	-1/2	1/2
δ^2	3/2	-1/2	-3/2
δ^3	1	-2	-1
Δ	5/2	-3/2	-5/2

T_3	δ^3	δ^1	1
ε_1	-3/2	-5/2	0
ε_2	11/2	21/2	0
ε_3	1/2	3/2	0
x_1	1	2	0
x_2	1/2	1/2	0
x_2	1/2	1/2	1
δ^2	3/2	5/2	0
x_1	1	2	1
Δ	5/2	7/2	0

T_4	ε_1	δ^1	1
δ_3			0
x_2			1
δ_2			0
x_1			1
Δ	-5/3	-2/3	0

$\varepsilon_1 \in D_x^\pi$, так как $\Delta_{\max} = 0$.

Данный метод построения множества D_x^π обладает недостатком, связанным с разрушением области допустимых решений (ОДР) D_x при переносе ее граней в x . Действительно, вершины области D_x в преобразованной модели никак не отражены, а именно одна из них может составить π -множество в случае его совпадения с оптимальным решением. Такое совпадение возможно, если все π -критерии достигают максимум на одной вершине. Физически это значит, что они слабопротиворечивы – угол при вершине d -конуса приближается к 180° (градиенты π -критериев имеют практически совпадающие направления). Данный случай имеет место, если в π -множество не вошла ни одна из граней ОДР D_x . Следовательно, π -множество совпадает с оптимальным решением. Для определения π -множества решается обычная ЗЛП с одним из π -критериев.

Если при этом получено множество оптимальных решений, то решается ЗЛП с другим ч-критерием. Пересечение оптимальных решений и является П-множеством. Для ЛПР указание на то, что некоторая грань $\varepsilon_i = \varepsilon_i^П \in D_x^П$ П-оптимальна, является только обобщенной информацией.

4. Определение альтернативных вариантов многокритериальной задачи

Наиболее естественным и разумным решением мк-задачи было бы органическое объединение всех ч-критериев в виде единой ЦФ. Иногда это удается сделать путем создания более общей модели, в которой ч-критерии являются аргументами более общей целевой функции, объединяющей в себе все частные цели операции. На практике этого редко удается достигнуть, что, собственно, и является основной причиной появления проблемы многокритериальности. Однако наиболее распространенный подход к решению проблемы пока остается все-таки один: тем или иным путем свести решение мк-задачи к решению однокритериальной задачи. В основе подхода лежит предположение о существовании некой функции полезности, объединяющей в себе ч-критерии, но которую в явном виде, как правило, получить не удастся. Получение наиболее обоснованной «свертки» ч-критериев является предметом исследований нового научного направления, возникшего в связи с проблемой многокритериальности - теории полезности. В данной работе будут рассмотрены некоторые подходы, позволяющие получить варианты решения мк-задач при тех или иных посылках и которые лицо принимающее решение (ЛПР) должно рассматривать как альтернативные при принятии окончательного решения и которые, конечно, должны удовлетворять необходимому условию- П-оптимальности.

Метод гарантированного результата

При любом произвольном решении $x \in D_x$ каждый из ч-критериев примет определенное значение и среди них найдется, по крайней мере, один, значение которого будет наименьшим:

$$\varphi = \varphi(x) = \min_{1 \leq r \leq R} L^r(x) \rightarrow \max_x \quad (9)$$

Метод гарантированного результата (ГР) позволяет найти такое (гарантированное) решение, при котором значение «наименьшего» критерия станет максимальным. Таким образом, целевая функция (ЦФ) является некоторой сверткой ч-критериев (9), а МЗЛП сводится к задаче КВП (кусочно-выпуклого программирования) при ОДР D_x , заданной линейными ограничениями.

Исходные условия записываем в каноническом виде:

$$\delta^1 = x_1 - 2x_2 - \phi + 2,$$

$$\delta^2 = x_1 + x_2 - \phi + 4,$$

$$\delta^3 = -x_1 + 4x_2 - \phi + 20,$$

$$\varepsilon_1 = -x_1 - x_2 + 15,$$

$$\varepsilon_2 = 5x_1 + x_2 - 1,$$

$$\varepsilon_3 = x_1 - x_2 + 5,$$

потом в виде с-таблицы:

T ₁	x ₁	x ₂	φ	1
ε ₁	-1	-1	0	15
ε ₂	5	1	0	-1
ε ₃	1	-1	0	5
δ ¹	1	-2	-1	2
δ ²	1	1	-1	4
δ ³	-1	4	-1	20

Вводя в базис переменную φ (δ¹ ↔ φ), получаем обычную ЗЛП при максимизации ЦФ φ.

T ₂	x ₁	x ₂	δ ¹	1
ε ₁	-1	-1	0	15

ε_2	5	1	0	-1
ε_3	1	-1	0	5
ϕ	1	-2	-1	2
$\bar{\delta}^2$	0	3	1	2
$\bar{\delta}^3$	-2	6	1	18

T_3	$\bar{\delta}^3$	x_2	$\bar{\delta}^1$	1	b_i/a_{is}
ε_1	1/2	-4	-1/2	6	6/4
ε_2	-5/2	16	5/2	44	-
ε_3	-1/2	2	2	14	-
ϕ	-1/2	1	-1/2	11	-
$\bar{\delta}^2$	0	3	-1	2	-
x_1	-1/2	3	1/2	9	-

T_4	$\bar{\delta}_3$	ε_1	$\bar{\delta}_1$	1
x_2				3/2
ε_2				68
ε_3				17
ϕ	-3/8	-1/4	-5/8	25/2
$\bar{\delta}_2$				13/2
x_1				27/2

Решение ЗЛП приводит к конечной с-таблице T_4 . Видно, что полученное гарантированное решение x п-оптимально, поскольку введение в базис любой свободной переменной (т.е. ее увеличение) приведет к снижению ϕ - нижнего уровня ч-критериев ($\forall c_j < 0$). Из таблицы также видно, что решение $x^0 = (27/2; 3/2)$ находится на грани ε_4 , при этом значения ч-критериев равны (находим по формуле $L^r(x^r) = \phi + \bar{\delta}^r$):

$$L_1 = L_3 = \phi = 25/2$$

$$L_2 = \phi + \bar{\delta}_2 = 25/2 + 13/2 = 19$$

$$L^Z = 88/2 = 44$$

$$x^0 = (27/2; 3/2)$$

Если бы в строке ϕ имелись нули, то это означало бы, что одну из соответствующих переменных можно ввести в базис (увеличить без снижения уровня ϕ). Это могло бы привести и к увеличению приращения $\bar{\delta}^r$ для некоторого ч-критерия, находящегося в базисе.

Метод линейной свертки частных критериев

Линейная свертка ч-критериев получается как сумма с некоторыми весовыми коэффициентами μ_r :

(9)

$$L(x) = \sum_{r=1}^R \mu_r L^r(x),$$

где

(10)

Меняя порядок суммирования и вводя обозначения c_j и c_0 , окончательно получим:

(11)

Коэффициенты веса обычно получают путем опроса экспертов из соответствующей предметной области. Поскольку вектор $\mu = (\mu_r)$ – суть вектор-градиент ЦФ $L^\mu(x)$, то предполагается, что он указывает направление к экстремуму неизвестной функции полезности. Положительная сторона такого подхода – несложность, не всегда компенсирует его серьезный недостаток – потерю физического смысла линейной свертки разнородных ч-критериев. Это затрудняет интерпретацию результатов, поэтому полученное таким путем решение, следует рассматривать только как возможный (альтернативный) вариант решения ЛПР. Для его сравнительного анализа следует привлекать любые другие варианты и, конечно, значения ч-критериев, получаемые при этом. Иногда при получении свертки ч-критериев предварительно нормируются каким-нибудь способом.

Наиболее приемлемой линейная свертка ч-критериев может оказаться в том случае, когда ч-критерии однородны и имеют единый эквивалент, согласующий их наиболее естественным образом.

На содержательном уровне данная МЗЛП состоит в необходимости принятия такого компромиссного решения (плана выпуска продукции) $x^k \in D_x$, которое обеспечит, по возможности, наибольшую суммарную выручку $L^1(x)$ от реализации произведенной продукции; наименьший расход ресурсов i -го вида $L^i(x)$ ($i = 1; m$); минимальные налоговые отчисления от прибыли $L^H(x)$ (или общей выручки).

Указанные цели носят противоречивый характер, и фактически мы имеем МЗЛП с $m+2$ –мя ч-критериями (m – количество видов потребляемых ресурсов). ОДР обусловлена ресурсными ограничениями и условиями неотрицательных переменных:

где a_{ij} – расход ресурса i -го вида для выпуска 1 единицы продукции j -го вида ($j=1,n$);

b_i – запас ресурса i -го вида;

ε_i – остаток ресурса i -го вида при плане выпуска $x = (x_j)_n$. Ч-критерии однородны, если они могут быть сведены к единой мере измерения. В качестве такой меры можно взять денежный эквивалент. Тогда $m+2$ ч-критерия могут быть с помощью линейной свертки сведены к трем:

общая выручка (руб.):

общая экономия ресурсов (руб.):

налоговые отчисления (руб.):

где c_j – выручка от реализации 1 ед. продукции j -го вида (цена); s_i – стоимость (цена) 1 ед. ресурса i -го вида ($i = 1; m$); Π_j – прибыль от реализации 1 ед. продукции j -го вида ($j = 1; n$); a_j – доля (процент) налоговых отчислений от прибыли (выручки).

В заключение заметим, что коэффициенты μ_r не обязательно должны удовлетворять условию (10), но обязательно должны быть положительными, если все ч-критерии максимизируются.

Перейдем к решению:

T_1	x_1	x_2	1
ε_1	-1	-1	15
ε_2	5	1	-1
ε_3	1	-1	5
L_1	1	-2	2
L_2	1	1	4
L_3	-1	4	20
L^Σ	1	3	26

T_2	ε_1	x_2	1
x_1	-1	-1	15

ϵ_2	-5	-4	74
ϵ_3	-1	-2	20
L_1	-1	-1	17
L_2	-1	0	19
L_3	1	5	5
L^Σ	-1	2	41

$$L_{1 \max} = 17$$

$$L_{2 \max} = 19$$

$$L_3 = 5$$

$$L^\Sigma = 41$$

T_3	ϵ_1	L_1	1
x_1			28/3
ϵ_2			154/3
ϵ_3			26/3
x_2			17/3
L_2			19
L_3	-2/3	-5/3	100/3
L^Σ	-5/3	-2/3	157/3

Составление сводной таблицы.

Окончательное решение сводится в таблицу, где записываются альтернативные варианты:

Метод	x^0	L_1	L_2	L_3	L^Σ
Метод гарантированного результата	(27/2 ; 3/2)	25/2	19	25/2	44
Метод свертки	(28/3;17/3)	0	19	33 1/3	52 1/3
Оптимизация L_1	(15;0)	17	19	5	41
Оптимизация L_2, L_3	(28/3;17/3)	0	19	33 1/3	52 1/3
$x \in D_x^\pi$	(5;3)	1	12	-13	0