

Mines-Ponts 2000

PSI 1

Partie préliminaire

M est un sous-ensemble non vide de $M_2(CI)$ qui est un espace vectoriel sur CI donc sur IR . Si $m = (a \ i b \ i \bar{b} \ \bar{a})$ et $m' = (a' \ i b' \ i \bar{b}' \ \bar{a}')$ et si $\lambda \in IR$, $m + \lambda m' = (a + \lambda a' \ i(b + \lambda b') \ i(\bar{b} + \lambda \bar{b}') \ \bar{a} + \lambda \bar{a}')$ est un élément de M . Donc M est un sous-espace vectoriel réel de $M_2(CI)$.

Notons $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$ les décomposition de a et b en partie réelle et imaginaire. Alors $m = a_1 I + a_2 (i \ 0 \ 0 \ -i) + b_1 (0 \ i \ i \ 0) + b_2 (0 \ -1 \ 1 \ 0)$ ce qui montre que M est engendré (sur IR) par les 4 matrices I , $v_1 = (i \ 0 \ 0 \ -i)$, $v_2 = (0 \ i \ i \ 0)$ et $u_1 = (0 \ -1 \ 1 \ 0)$. De plus, ces 4 matrices sont indépendantes puisque $m = 0$ implique $a = b = 0$. Donc $\dim_{IR} M = 4$.

On remarque que $\{\cdot\}$. Il en résulte que la multiplication est une opération interne dans M .

Première partie

I. 1. Si $m = (a \ i b \ i \bar{b} \ \bar{a})$, $m + \bar{m} = (a \ i b \ i \bar{b} \ \bar{a}) + (a' \ -i b \ -i \bar{b} \ a) = (Tr m)I$ et $m \cdot \bar{m} = (aa' + bb' \ 0 \ 0 \ aa' + bb')$ $= (det m)I$.

Une matrice g de M est donc dans G ssi $g g^{-1} = I$, c'est à dire $g^{-1} = g^{-1}$.

Si $Tr m = 0$, $m + \bar{m} = 0$ d'où $m^2 = -m \cdot \bar{m} = -(det m)I = m^2$.

I. 2. Par unicité de la décomposition d'une matrice en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, une matrice m de M antisymétrique ssi elle est multiple de u_1 . Donc $U = \{u_1, -u_1\}$.

D'après les calculs de la fin de la partie préliminaire, la relation $m \cdot u_1 = u_1 \cdot m$ est satisfaite pour $m = I$, $m = v_1$, $m = v_2$ et bien sûr pour $m = u_1$ puisque u_1 est réelle. Par linéarité, elle est donc satisfaite pour toute matrice m de M . On peut évidemment remplacer u_1 par $-u_1$, d'où $m \cdot u = u \cdot m$ pour tout m dans M et tout u dans U .

Si $Tr m = 0$, m est combinaison linéaire de v_1 , v_2 et u_1 . Le produit de chacune de ces matrices (à droite ou à gauche) par u_1 est dans V . Donc $m \cdot u_1$ et $u_1 \cdot m$ sont dans V ; on peut bien sûr remplacer u_1 par $-u_1$.

I. 3. $(m|m) = \frac{1}{2} Tr(m \bar{m}) = det m$ d'après 1., d'où $\|m\| = \sqrt{det m}$.

Par suite, $\|m \cdot w\| = \sqrt{det m \cdot w} = \sqrt{det m} \sqrt{det w} = \|m\| \|w\|$.

I. 4. a. Si $g = (a \ i b \ i \bar{b} \ \bar{a}) \in G$, $|a|^2 + |b|^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$ (avec $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$ comme dans la partie préliminaire). Il existe alors un unique $\hat{J}[0, p]$ tel que $a_1 = \cos J$ et

$$g = \cos J \ I + a_2 (i \ 0 \ 0 \ -i) + b_1 (0 \ i \ i \ 0) + b_2 (0 \ -1 \ 1 \ 0) = \cos J \ I + m$$

où m est une matrice de trace nulle de M .

$$I = g \cdot g^{-1} = (\cos J I + m) \cdot (\cos J I + m^{-1}) = \cos^2 J I + \cos J (m + m^{-1}) + m \cdot m^{-1} = (\cos^2 J + det m) I.$$

On en tire $det m = \sin^2 J$, d'où, d'après 1., $m^2 = -(\sin^2 J)I$.

b. Soit $m = (a \ i b \ i \bar{b} \ \bar{a}) \in M$ non nulle; l'un au moins des coefficients a ou b est non nul et par conséquent, $det m = |a|^2 + |b|^2 \neq 0$. On peut donc définir $g_1 = \frac{1}{\sqrt{det m}} m$ qui est aussi dans l'espace vectoriel M . De plus, comme les matrices sont de taille 2, $det g_1 = \frac{1}{det m} det m = 1$. Donc g_1 est bien une matrice de G .

I. 5. D'après 1., $g_1^2 = -I$. On en déduit que $m_J \cdot m_{J'} = I \cos(J + J') + g_1 \sin(J + J') = m_{J+J'}$ où $J + J'$ représente l'addition dans le groupe $IR/2pZZ$ des réels modulo $2p$. Il en résulte que $G(g_1)$ est un sous-ensemble non vide de G , stable par composition et passage à l'inverse (car $m_J^{-1} = m_{2p-J}$), c'est à dire un sous-groupe de G . De plus, ce sous-groupe est isomorphe à $IR/2pZZ$, c'est à dire au groupe des rotations du plan euclidien, et en particulier est commutatif.

Deuxième partie

II. 1. a. Le sous-espace de M engendré par les matrices I, v_1 et v_2 (notation de la partie préliminaire) est contenu dans V qui est donc au moins de dimension 3. Comme M contient la matrice u_1 qui n'est pas symétrique, V est exactement de dimension 3 et admet le système $\{I, v_1 \text{ et } v_2\}$ comme base.

b. L'application l_g est manifestement linéaire. Par ailleurs, $l_g(w) = w \cdot g + g \cdot w = l_g(w)$ puisque w est symétrique. Donc l_g est bien un endomorphisme de V .

$l_g(I) = g + g$. Si l_g était le morphisme nul, on en déduirait que $g = -g$, mais comme $\text{Tr } g = 0$, on a aussi $g = -g^T$ et par conséquent $g = g^T$. Or g est dans le noyau de la forme linéaire Tr qui est l'hyperplan engendré par v_1, v_2 et u_1 et les seules matrices réelles de cet hyperplan sont des multiples de u_1 . Enfin, comme $gI = g, g = \pm u_1$. Mais dans ce cas, $l_g(v_1) = -2v_1$ ce qui contredit l'hypothèse initiale. Donc l_g n'est pas le morphisme nul.

II. 2. a. Il résulte de **I. 1.** que pour tout g dans G de trace nulle, $g^2 = g^2 = -I$. On en déduit

$$l_g \circ l_g(w) = g \cdot (g \cdot w + w \cdot g) + (g \cdot w + w \cdot g) \cdot g = g^2 \cdot w + 2g \cdot w \cdot g + w \cdot g^2 = 2g^2 \cdot w + 2g \cdot w \cdot g = 2g \cdot l_g(w)$$

$$\text{En composant par } l_g, \quad l_g(l_g(l_g(w))) = \frac{1}{2} l_g \circ l_g \circ l_g(w) = g \cdot l_g \circ l_g(w) = 2g^2 \cdot l_g(w) = -2l_g(w).$$

$$\text{En utilisant } \mathbf{I. 3.}, \quad \|g \cdot l_g(w)\| = \|g\| \|l_g(w)\| = \sqrt{\det g} \|l_g(w)\| = \|l_g(w)\|.$$

$$\text{Enfin, puisque } g^{-1} = g^T \quad (\mathbf{I. 1.}), \quad \text{et, pour } u \text{ dans } U, \quad g \cdot u = u \cdot g^T \quad (\mathbf{I. 2.}),$$

$$l_g(g \cdot u) = g^2 \cdot u + g \cdot u \cdot g = -u + u \cdot g^T \cdot g = 0.$$

$$\mathbf{b.} \text{ Pour } v \text{ et } w \text{ dans } V, \text{ en sachant que } \text{Tr}(v \cdot v^T) = \text{Tr}(v^T \cdot v) \text{ et en utilisant la propriété } g^{TT} = g^{-1} = -g,$$

$$(l_g(v)|w) = \frac{1}{2} \text{Tr}((g \cdot v + v \cdot g) \cdot w^T) = \frac{1}{2} \text{Tr}(v \cdot w^T \cdot g + v \cdot g \cdot w^T) = (v|g^T \cdot w + w \cdot g^T) = (v|l_{g^{-1}}(w)) = -(v|l_g(v))$$

Donc $l_g^* = -l_g$; autrement dit, l_g est antisymétrique.

c. Alors, pour tout w dans V ,
 $(l_g(w)|g \cdot l_g(w)) = -(w|l_g(g \cdot l_g(w))) = -(w| -2l_g(w)) = 2(w|l_g(w)) = 0$ puisque l_g est antisymétrique.
 Les matrices $l_g(w)$ et $g \cdot l_g(w)$ sont donc perpendiculaires.

II. 3. a. Une matrice u de U est égale à u_1 ou à $-u_1$. Elle est donc de déterminant 1, d'où $u \cdot u^T = I$ et
 $(u|h_0) = \frac{1}{2} \text{Tr}(u \cdot u^T \cdot g^T) = \frac{1}{2} \text{Tr}(-g) = 0.$

Remarquons que $l_g(u) = g \cdot u + u \cdot g = g \cdot u - u \cdot g^T = 0$ d'après **I. 2.**, d'où

$$(u|h_1) = (u|l_g(v)) = -(l_g(u)|v) = 0$$

$$(u|h_2) = (u|g \cdot l_g(v)) = \frac{1}{2} (u|l_g \circ l_g(v)) = \frac{1}{2} (l_g \circ l_g(u)|v) = 0.$$

Dans le dernier calcul de **2. a.**, on a vu que $l_g(g \cdot u) = 0$, d'où

$$(h_0|h_1) = (g \cdot u|l_g(v)) = -(l_g(g \cdot u)|v) = 0$$

$$(h_0|h_2) = (g \cdot u|g \cdot l_g(v)) = \frac{1}{2} (g \cdot u|l_g \circ l_g(v)) = -\frac{1}{2} (l_g(g \cdot u)|l_g(v)) = 0.$$

Enfin $(h_1|h_2) = (l_g(v)|g \cdot l_g(v)) = 0$ d'après **2. c.**

b. On vérifie aisément que V est l'hyperplan orthogonal à u_1 . En effet, V est engendré par les trois matrices I, v_1 et v_2 et $\{I, v_1, v_2\}$. Il en résulte que h_0, h_1 et h_2 sont dans V (c'est à dire sont symétriques) et en constituent un système orthogonal. De plus $h_0 = g \cdot u$ car g et u sont inversibles, $h_1 = l_g(v)$ par hypothèse et $h_2 = g \cdot h_1$ car g est inversible. Donc ces trois matrices constituent bien une base orthogonale de V .

Pour obtenir une base orthonormée, il suffit alors de normaliser les vecteurs. On remarque

$$\text{d'une part que } \|h_0\| = \|g\| \|u\| = \sqrt{\det g} \sqrt{\det u} = 1,$$

$$\text{d'autre part que } \|h_2\|^2 = (g \cdot l_g(v)|g \cdot l_g(v)) = \frac{1}{2} (l_g \circ l_g(v)|g \cdot l_g(v)) = (l_g(v)|l_g(v)) = \|h_1\|^2.$$

On prendra donc comme base orthonormée le système $\left\{ h_0, \frac{h_1}{\|l_g(v)\|}, \frac{h_2}{\|l_g(v)\|} \right\}.$

Pour trouver la matrice de l_g dans cette base, on remarque que $l_g(h_0) = l_g(g \cdot u) = 0$ (**2. a.**) et en utilisant **2. b.** puis **2. a.**, on calcule

$$\left(l_g \left(\frac{h_1}{\|l_g(v)\|} \right) \middle| \frac{h_2}{\|l_g(v)\|} \right) = \frac{1}{\|l_g(v)\|^2} (l_g \circ l_g(v)|g \cdot l_g(v)) = -\frac{1}{\|l_g(v)\|^2} (l_g(v)|l_g(g \cdot l_g(v))) = \frac{2(l_g(v)|l_g(v))}{\|l_g(v)\|^2} = 2.$$

Comme la matrice de l_g dans une base orthonormée est antisymétrique, elle s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

l_g est donc la projection orthogonale sur le plan engendré par h_1 et h_2 composée avec la rotation d'angle p_2 dans ce plan orienté.

II. 4. En utilisant l'égalité $g^2 = -I$, $\{\{\{$. On en déduit que la matrice de s_j dans la base $\{u, h_0, h_1, h_2\}$ s'écrit $(\cos J \quad -\sin J \quad 0 \quad 0 \quad \sin J \quad \cos J \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cos J \quad -\sin J \quad 0 \quad 0 \quad \sin J \quad \cos J)$. On peut remarquer que cette base n'est pas orthonormée mais qu'elle est orthogonale, que u et h_0 sont normés et que si on normalise h_1 et h_2 , la matrice ne changera pas.