

Matematika A3 vizsgadolgozat

2011.12.21

Minden feladat 10 pontos!

1. Adjuk meg az

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x} \cos x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2$$

kezdeti érték probléma megoldását!

2. Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$2xe^{x^2} + y \sinh x + (\cosh x - 2 \cosh 2y)y' = 0$$

3.

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z^2(1+z)(3-z)} dz = ?$$

4. Határozzuk meg az $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ függvény izolált szinguláris helyei körül a Laurent-sorát! Mi a Laurent-sorok konvergenciatartománya?

5. Számítsuk ki a $v(r) = (x^2, xz, 3z)$ vektor-vektor függvény felületi integrálját az origó középpontú 2 sugarú gömbfelületre, befelé mutató normálvektort feltételezve!

6. Számítsuk ki a $v(r) = (2z, 3x, 5y)$ vektor-vektor függvény rotációjának az

$F: r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 4 - u^2)$, $0 < u < 2$, $0 < v < 2\pi$ felületre vett integrálját, ha a felület $r'_u \times r'_v$ vektorral van irányítva!

1)

$$y'''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x} \cos x$$

Homogén megoldás:

$$y'''' + 3y'' + 3y' + y = 0$$

Lineáris differenciálegyenlet:

$$\lambda^3 + 3 + 3\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)^3 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1 \text{ Belső rezonancia}$$

$$y_h = c_1 * e^{-x} + c_2 * x e^{-x} + c_3 * x^2 e^{-x}$$

Inhomogén megoldás:

próbafüggvény:

$$y_g = A e^{-x} \cos x + B e^{-x} \sin x$$

Beírva a teljes egyenletbe ezek adódtak: A=0, B=1, tehát

$$y_p = e^{-x} \sin x.$$

Kezdeti érték probléma:

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2$$

$$y_{teljes} = e^{-x} (-x + x^2 + \sin x)$$

2)

$$2xe^{x^2} + y \sinh x + (\cosh x - 2 \cosh 2y)y' = 0$$

Pl. egzakt differenciálegyenletek megoldása:

Egzakt?

$$P'_y = Q'_x?$$

(Ha segít, mert én így dolgoztam:)

$$2xe^{x^2} + y \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2 \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} \right) y' = 0$$

$$P'_y = \left(2xe^{x^2} + y \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)'_y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$Q'_x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2 \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} \right)'_x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Tehát egzakt.

$$F = \int P dx = (2xe^{x^2} + y \frac{e^x - e^{-x}}{2}) dx = e^{x^2} + y \frac{e^x + e^{-x}}{2} + c(y)$$

$$F'_y = (e^{x^2} + y \frac{e^x + e^{-x}}{2} + c(y))'_y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + c'(y) := Q = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2 \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}$$

Ekkor:

$$c'(y) = -2 \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} = -e^{2y} - e^{-2y}$$

$$c = \int -e^{2y} - e^{-2y} dy = \frac{-e^{2y}}{2} - \frac{e^{-2y}}{-2} = -\frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2} = -\sinh(2y)$$

$$F = e^{x^2} + y \frac{e^x + e^{-x}}{2} + c(y) = e^{x^2} + y \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \sinh(2y) = e^{x^2} + y \cosh(x) - \sinh(2y)$$

3)

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z^2(1+z)(3-z)} dz$$

Szinguláris helyek: $(z^2) \rightarrow 0$, $(1+z) \rightarrow -1$, $(3-z) \rightarrow 3$

Ahol dolgozni kell: $|z|$ miatt origó középpontú 2 sugarú kör: 0 és -1 van benne, 3-mal nem kell dolgozni:

Cauchy-féle integráltételek:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$z=-1$:

$$\oint \frac{e^{\pi z}}{z^2(1+z)(3-z)} dz = \dots f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2(3-z)}, z_0 = -1 \dots = f(z_0) * 2\pi i = \frac{e^{\pi z}}{z^2(3-z)} * 2\pi i (z = -1) =$$

$$\frac{e^{-\pi}}{(-1)^2(3-(-1))} * 2\pi i = \frac{e^{-\pi}}{4} * 2\pi i = \frac{i\pi e^{-\pi}}{2}$$

$z=0$

$$\oint \frac{e^{\pi z}}{z^2(1+z)(3-z)} dz = \dots n = 1 \dots = f'(z_0) 2\pi i = \dots$$

...

$z=-1$ és $z=0$ összege kell.

...

$f(0)$ -ra $1/9$

összeg összevonás után: $-7/18\pi j$

4)

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

Laurent-sor:

szinguláris helyek: $z_0=-1$, $z_1=-2$

Letakarós szabállyal:

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z+1)(z+2)} &= \frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1} = \frac{2}{(z+1)+1} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z+1} \left(\frac{2}{1+\frac{1}{z+1}} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{z+1} \left(2 \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n (z+1)^{-n}] - 1 \right) = \frac{2}{z+1} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n (z+1)^{-n}] = \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} [(-1)^{k+1} (z+1)^{-k-2}]\end{aligned}$$

$|z+1| > 1$ konvergens

...

5)

$$v(r) = (x^2, xz, 3z)$$

Gauss - Osztrogradiszkij tétel

$$\oint_F \bar{v} dF = \iiint \operatorname{div} \bar{v} dV$$

$$\operatorname{div} \bar{v} = \operatorname{div}(x^2, xz, 3z) = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 2x + 0 + 3 = 2x + 3$$

$$\iiint 2x + 3 dV = \text{gömbi koordináták: } x = \cos\varphi \sin\vartheta =$$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (2\cos\varphi \sin\vartheta + 3) * r^2 \sin\vartheta \, d\varphi d\vartheta dr &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\cos\varphi \sin^2\vartheta r^2 + 3\sin\vartheta r^2 \, d\varphi d\vartheta dr = \\
\int_0^2 \int_0^{2\pi} [2\sin\varphi \sin^2\vartheta r^2 + 3\sin\vartheta r^2 \varphi] d\vartheta dr &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 2\sin\vartheta r^2 2\pi \, d\vartheta dr = \int_0^2 [-4\pi \cos\vartheta r^2] dr = \\
\int_0^2 -4\pi r^2 * (-2) dr &= \int_0^2 8\pi r^2 \, dr = \left[\frac{8\pi r^3}{3} \right] = \frac{8\pi 2^3}{3} = \frac{8*8\pi}{3} = \frac{64\pi}{3}
\end{aligned}$$

6)

$v(r) = (2z, 3x, 5y)$ rotációjának az

$F: r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 4 - u^2)$, $0 < u < 2$, $0 < v < 2\pi$

felületre vett integrálját, ha a felület $r'_u \times r'_v$ vektorral van irányítva!

$$\begin{aligned}
\text{rot } v(r) &= \text{rot } (2z, 3x, 5y) = \bar{i} \left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} - \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} \right) + \bar{j} \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) = \\
&= (0 - 5, 0 - 2, 0 - 3) = (-5, -2, -3) \\
&\dots
\end{aligned}$$

lehet alkalmazni a Stokes tételt:

$$\int_F \text{rot}(r(u, v)) dA = \int_{u=0}^2 \int_{v=0}^{2\pi} \langle r(u, v), r'_u \times r'_v \rangle \, dv \, du$$

Ezt alkalmazva 24π lett a végeredmény