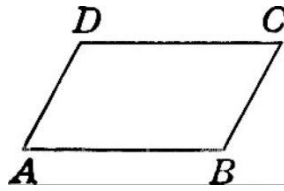


1.- (prueba extraordinaria) Se sabe que los puntos $A(1, 0, -1)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(-7, 1, 5)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD.

(a) Calcula las coordenadas del punto D.

Resolución



Sea $D(x, y, z)$ el cuarto vértice. Entonces, $\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow (2, 2, 2) = (-7 - x, 1 - y, 5 - z)$

Luego, $2 = -7 - x$; $x = -9$; $2 = 1 - y$; $y = -1$; $2 = 5 - z$; $z = 3$. Por tanto, $D(-9, -1, 3)$

(b) Halla el área del paralelogramo

Resolución

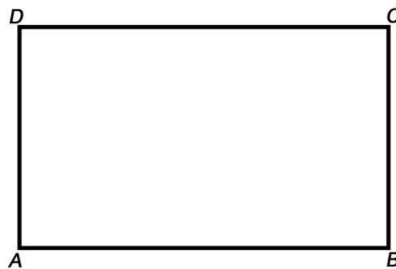
$\vec{AD} = (-10, -1, 4)$. Sabemos que $A(\text{paralelogramo}) = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -10 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (10, -28, 18)$$

$$A(\text{paralelogramo}) = \sqrt{10^2 + (-28)^2 + 18^2} = \sqrt{1208} \cong 34,76 \text{ u}^2$$

2.- (prueba extraordinaria) Los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(2, 2, 1)$ son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. Además, se sabe que los vértices C y D están contenidos en una recta que pasa por el origen de coordenadas. Halla C y D.

Resolución



Si r es la recta que pasa por C y D, un vector director de r es $\vec{DC} = \vec{AB} = (1, 1, 1)$

Y como r pasa por $O(0, 0, 0)$, entonces $r: \{x = k, y = k, z = k\}$. Luego, $C(k, k, k)$, $D(k', k', k')$

$$\vec{DC} = (k - k', k - k', k - k') = (1, 1, 1) \Rightarrow k' = k - 1 \text{ y } C(k, k, k), D(k - 1, k - 1, k - 1)$$

Por otra parte, como $\vec{AB} \perp \vec{AD}$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0 \Rightarrow (1, 1, 1) \cdot (k - 2, k - 2, k - 1) = 0 \Rightarrow k - 2 + k - 2 + k - 1 = 3k - 5 = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{3}$$

$$\text{Luego, } C\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) \text{ y } D\left(\frac{5}{3} - 1, \frac{5}{3} - 1, \frac{5}{3} - 1\right) \Rightarrow D\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

3.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 1, -1)$, es paralela al plano $3x - y + z = 4$ y corta a la recta intersección de los planos $x + z = 4$ y $x - 2y + z = 1$.

Resolución

$A(3, 1, -1) \notin \pi: 3x - y + z = 4$ porque no cumple su ecuación, $3 \cdot 3 - 1 - 1 = 7 \neq 4$.

$r: \{x + z = 4 \quad x - 2y + z = 1\}$; si $x = 0$; $z = 4$; $-2y + 4 = 1, y = \frac{3}{2}$. Luego, $P(0, \frac{3}{2}, 4) \in r$

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la

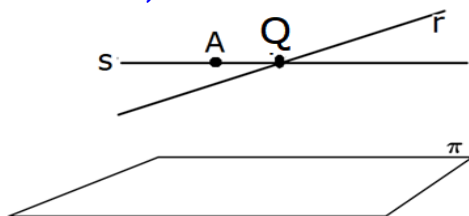
definen: $\vec{d} = (1, 0, 1) \times (1, -2, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, -2) // (1, 0, -1)$ y

$r: \{x = k \quad y = \frac{3}{2} \quad z = 4 - k\}$

Como el vector director de r , $\vec{d} = (1, 0, -1)$ y el vector normal de π , $\vec{n} = (1, -2, 1)$ son ortogonales ya

que $\vec{d} \cdot \vec{n} = 1 - 1 = 0$ y $P(0, \frac{3}{2}, 4) \in r$, $P \notin \pi$ porque no cumple su ecuación deducimos que r y π son paralelos.

Sea s la recta que buscamos y $Q(k, \frac{3}{2}, 4 - k)$ un punto genérico de r .



Por ser $s // \pi$, tenemos que $\vec{AQ} \perp \vec{n}$. Luego, $\vec{AQ} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (k - 3, \frac{1}{2}, 5 - k) \cdot (1, 2, -1) = 0$

Operando, $k - 3 + 1 + k - 5 = 0 \Rightarrow 2k - 7 = 0 \Rightarrow k = \frac{7}{2}$ y $Q(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

La recta que buscamos, s , pasa por $A(3, 1, -1)$ y tiene vector director

$\vec{d}_s = \vec{AQ} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) // (1, 1, 3)$

Luego, unas ecuaciones paramétricas de s son $s: \{x = 3 + k \quad y = 1 + k \quad z = -1 + 3k\}$

4.- Considera la recta $r: \{x + y - z = 1 \quad y = 2\}$ y el plano $\pi: x - 2y + z = 0$.

(a) Calcula el haz de planos que contienen a la recta r .

Resolución

Su ecuación es $\pi_{a,b}: a(x + y - z - 1) + b(y - 2) = 0 \Rightarrow \pi_{a,b}: ax + (a + b)y - az - a - 2b = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$

(b) Halla el plano que contiene a la recta r y corta al plano π en una recta paralela al plano $z = 0$.

Resolución

La recta paralela al plano $z = 0$ de vector normal $\vec{n} = (0, 0, 1)$ es

$s: \{ax + (a + b)y - az - a - 2b = 0 \quad x - 2y + z = 0\}$

Un vector director de s se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen:

$\vec{d}_s = (a, a + b, -a) \times (1, -2, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a + b & -a \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (b - a, -2a, -3a - b)$

$\vec{d}_s \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow -3a - b = 0 \Rightarrow b = -3a$. Luego, $\pi: ax - 2ay - az + 5a = 0 \Rightarrow \pi: x - 2y - z + 5 = 0$

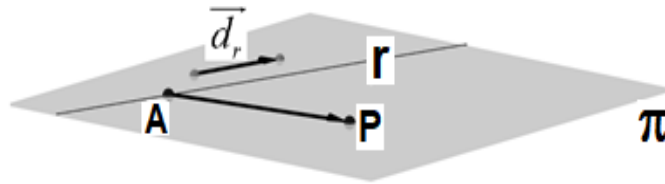
5.- Considera el punto $P(-2, 3, 0)$ y la recta $r: \{x + y + z + 2 = 0 \quad 2x - 2y + z + 1 = 0\}$

(a) Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene a la recta r .

Resolución

Observamos que $P(-2, 3, 0) \notin r$ porque no cumple sus ecuaciones:

$$\{-2 + 3 + 0 + 2 = 3 \neq 0 \quad 2(-2) - 2 \cdot 3 + 0 + 1 = -9 \neq 0\}$$



$$r: \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 2x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z + 4 = 0 \\ 2x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \text{ . Sumando,} \\ 4x + 3z + 5 = 0. \text{ Si } z = -3, 4x - 4 = 0, x = 1.$$

Sustituyendo, $1 + y - 3 + 2 = 0, y = 0$. Luego, $A(1, 0, -3) \in r$

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que definen a la recta r : $\vec{d}_r = (1, 1, 1) \times (2, -2, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (3, 1, -4)$

El plano π que nos piden pasa por $P(-2, 3, 0)$ y tiene como vectores

directores $\vec{d}_r = (3, -1, 4)$ y $\vec{AP} = (-3, 3, 3) // (-1, 1, 1)$.

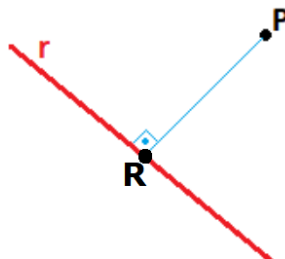
Luego, un vector normal de π es $\vec{n}_\pi = \vec{d}_r \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (5, 1, 4)$

$$\pi: 5(x + 2) + 1(y - 3) + 4(z - 0) = 0 \Rightarrow \pi: 5x + y + 4z + 7 = 0$$

(b) Determina el punto de r más próximo a P .

Resolución

Usando el (a) unas ecuaciones paramétricas de r son $r: \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = k \\ z = -3 - 4k \end{cases}$



El punto que buscamos de r es de la forma $R(1 + 3k, k, -3 - 4k)$ de forma que $\vec{d}_r \perp \vec{PR}$

$$\text{Como } P(-2, 3, 0), \vec{d}_r = (3, 1, -4) \cdot \vec{PR} = (3, 1, -4) \cdot (3 + 3k, k - 3, -3 - 4k) = 0$$

$$\text{Desarrollando, } 9 + 9k + k - 3 + 12 + 16k = 26k + 18 = 0 \Rightarrow k = \frac{-9}{13};$$

$$R\left(1 + 3\frac{-9}{13}, \frac{-9}{13} - 3, -3 - 4\frac{-9}{13}\right)$$

$$\text{Operando, el punto } R \text{ que buscamos es } R\left(\frac{-14}{13}, \frac{-9}{13}, \frac{-3}{13}\right)$$

6.- Considera una recta r y un plano π cuyas ecuaciones son, respectivamente,

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \quad \pi: \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

(a) Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π .

Resolución

$$A(0, 0, 0) \in r \quad \vec{d}_r = (1, 1, 0)$$

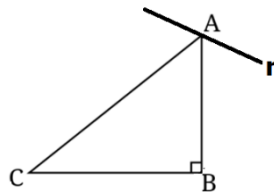
Al ser $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$ y $\vec{u}_2 = (0, 0, 1)$ vectores directores del plano π , un vector normal de π es

$$\vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 0)$$

Como $\vec{d}_r \cdot \vec{n} = 1 - 1 = 0$, $A(0, 0, 0) \in r, \pi$ se deduce que $r \subset \pi$

(b) Dados los puntos $B(4, 4, 4)$ y $C(0, 0, 0)$, halla un punto A en la recta r de manera que el triángulo formado por los puntos A, B y C sea rectángulo en B .

Resolución

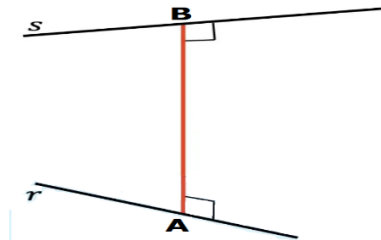


$A(t, t, 0) \in r$. Por ser el triángulo rectángulo en B , $\vec{BA} = (t - 4, t - 4, -4)$ y $\vec{CB} = (4, 4, 4)$ son perpendiculares $\Rightarrow \vec{BA} \cdot \vec{CB} = 0 \Rightarrow 4t - 16 + 4t - 16 - 16 = 8t - 48 = 0$; $t = 6$ y $A(6, 6, 0)$

7.- (prueba ordinaria) Sabiendo que las rectas $r: x = y = z$ y $s: \{x = 1 + \mu, y = 3 + \mu, z = -\mu\}$, se cruzan, halla los puntos A y B , de r y s respectivamente que están a mínima distancia

Resolución

Los puntos A y B que están a mínima distancia son los puntos que están en la intersección de r y s con su perpendicular común.



$A(k, k, k)$ y $B(1 + k', 3 + k', -k')$. El vector $\vec{AB} = (1 + k' - k, 3 + k' - k, -k' - k)$ es ortogonal a $\vec{d}_r$ y a $\vec{d}_s$ y, por tanto, paralelo a

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 2, 0) \quad // \quad (-1, 1, 0)$$

$$\frac{-1}{1 + k' - k} = \frac{1}{3 + k' - k} = \frac{0}{-k' - k}. \text{ Operando,}$$

$$\{k' + k = 0 \quad 1 + k' - k = -3 - k' + k \Rightarrow \{k' + k = 0 \quad 2k' - 2k = -4$$

Simplificando, $\{k' + k = 0 \quad k' - k = -2$. Sumando, $2k' = -2$, $k' = -1$; restando, $2k = 2$, $k = 1$.

Luego, $A(1, 1, 1)$ y $B(0, 2, 1)$

8.- (prueba ordinaria) Determina el punto P de la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$ que equidista de los planos

$$\pi_1: x + y + z + 3 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2: \{x = -3 + \lambda, y = -\lambda + \mu, z = -6 + \mu$$

Resolución

El punto P de r que se busca es de la forma $P(1 + 2k, -1 + k, 3k)$

El plano π_2 pasa por $A(-3, 0, -6)$ y al ser $\vec{u}_1 = (1, -1, 0)$ y $\vec{u}_2 = (0, 1, 1)$ vectores directores, un vector normal de π_2 es $\vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1) // (1, 1, -1)$

Entonces, $\pi_2: 1(x+3) + 1(y-0) - 1(z+6) = 0 \Rightarrow \pi_2: x + y - z - 3 = 0$

$$\text{dist}(P, \pi_1) = \text{dist}(P, \pi_2) \Rightarrow \frac{|1+2k-1+k+3k+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|1+2k-1+k-3k-3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} \Rightarrow |6k+3| = 3.$$

Luego, $6k+3=3, k=0$ y $P(1+2\cdot 0, -1+0, 3\cdot 0)$ ó $6k+3=-3, k=-1$ y $P(1+2\cdot(-1), -1-1, 3\cdot(-1))$

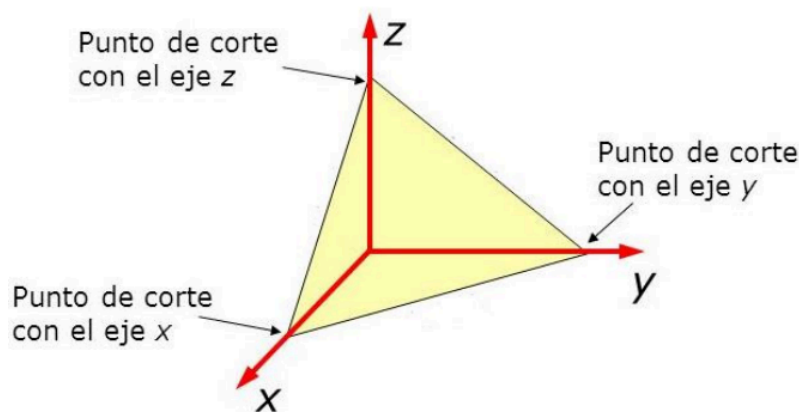
Por tanto, hay dos soluciones: $P_1(1, -1, 0)$ y $P_2(-1, -2, -3)$

Hemos usado la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

9.- Se sabe que el plano π corta a los semiejes positivos de coordenadas en los puntos A, B y C, siendo las longitudes de los segmentos OA, OB y OC de 4 unidades, donde O es el origen de coordenadas.

(a) Halla la ecuación del plano π .

Resolución



Por ser los segmentos OA, OB y OC de 4 unidades, $A(4, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ y $C(0, 0, 4)$

Al ser $\vec{AB} = (-4, 4, 0)$ y $\vec{AC} = (-4, 0, 4)$ vectores directores del plano π que se pide, un vector normal

$$\text{de } \pi \text{ es } \vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (16, 16, 16) // (1, 1, 1)$$

Y como π pasa por $A(4, 0, 0)$, entonces $\pi: 1(x-4) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0 \Rightarrow \pi: x + y + z - 4 = 0$

(b) Calcula el área del triángulo ABC.

Resolución

$$A(\text{triángulo}) = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} 16 |(1, 1, 1)| = 8 \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 8\sqrt{3} \cong 13,86 \text{ u}^2$$

(c) Obtén un plano paralelo al plano π que diste 4 unidades del origen de coordenadas.

Resolución

Por ser el plano α que se busca paralelo a π será de la forma $\alpha: x + y + z + k = 0$

$$\text{dist}(O, \alpha) = 4 \Rightarrow \frac{|0+0+0+k|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = 4 \Rightarrow |k| = 4\sqrt{3}. \text{ Luego, } k = 4\sqrt{3} \text{ ó } k = -4\sqrt{3}$$

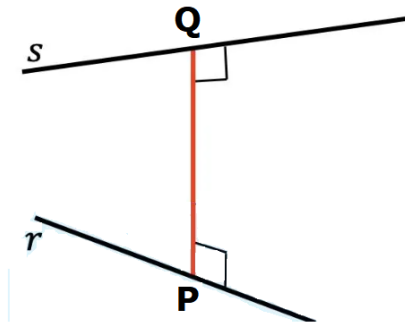
Hay dos planos solución: $\alpha_1: x + y + z + 4\sqrt{3} = 0$ y $\alpha_1: x + y + z - 4\sqrt{3} = 0$

Hemos usado la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

10.- Halla la perpendicular común a las rectas $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$ y $\begin{cases} x = \beta \\ y = 2 + 2\beta \\ z = 0 \end{cases}$

Resolución

Sean r y s las rectas dadas y $P(1+k, k, -k)$ y $Q(k', 2+2k', 0)$ puntos genéricos de r y s , respectivamente.



El vector $\vec{PQ} = (k' - 1 - k, 2 + 2k' - k, k)$ es ortogonal a $\vec{d}_r$ y a $\vec{d}_s$, por tanto, paralelo a

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (2, -1, 1). \text{ Así, } \frac{2}{k' - 1 - k} = \frac{-1}{2 + 2k' - k} = \frac{1}{k}.$$

Operando, $\begin{cases} -k = 2 + 2k' - k \\ 2k = -k' + 1 + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k' = -1 \\ k = 1 - k' \end{cases}$. Por tanto, $k' = -1, k = 2$ y $P(3, 2, -2)$ y $Q(-1, 0, 0)$.

La recta t que se pide es la que pasa por P y Q , $\vec{d}_t = (2, -1, 1)$

Luego, unas ecuaciones paramétricas de t son $t: \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = -k \\ z = k \end{cases}$

11.- Considera el plano $\pi: x - 2y + 1 = 0$ y la recta $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + az + 2 = 0 \end{cases}$

(a) Halla el valor de a sabiendo que la recta está contenida en el plano.

Resolución

Un vector normal de π es $\vec{n} = (1, -2, 0)$

$r: \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + az + 2 = 0 \end{cases}$. Haciendo $z = 0$, $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$. Restando, $2y + 2 = 0, y = -1$; $x = 3(-1) = -3$.

Luego, $A(-3, -1, 0) \in r$. Observamos que también $A \in \pi$ porque cumple su ecuación.

Por otra parte, un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los

planos que la definen:

$$\vec{d} = (1, -3, 1) \times (1, -1, a) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = (1 - 3a, 1 - a, 2)$$

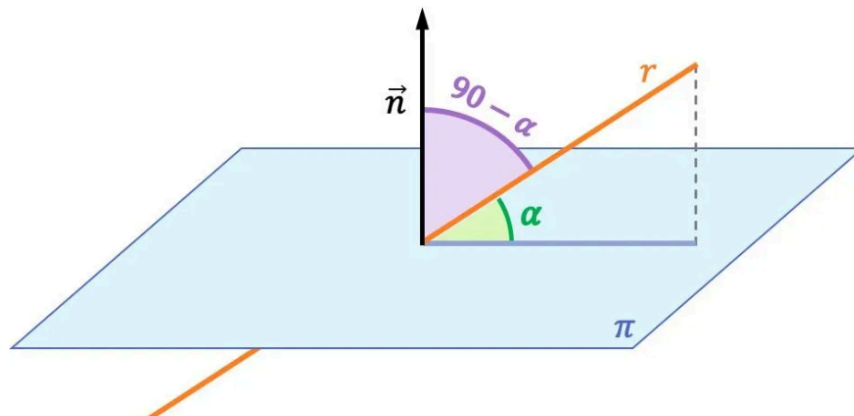


Por tanto, r está contenida en $\pi \Leftrightarrow \vec{d} \cdot \vec{n} = 0$. Operando, $1 - 3a - 2 + 2a = 0$, $a = -1$

(b) Calcula el ángulo formado por el plano π y la recta $\{x - 3y + z = 0 \quad x - y + z + 2 = 0\}$

Resolución

$\vec{n} = (1, -2, 0)$; $\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 0, 2) // (-1, 0, 1)$; como $\vec{d} \cdot \vec{n} = -1 \neq 0$, son secantes.



$$\operatorname{sen} \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|}$$

$$\alpha = (\hat{r}, \pi) = \arcsen \left| \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|} \right| = \arcsen \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{5}} \cong 18,435^\circ = 18^\circ 26' 6''$$

12.- Halla la ecuación de una circunferencia que pase por el punto $(-1, -8)$ y sea tangente a los ejes coordenados.

Resolución

Si el centro es $C(a, b)$ y el radio es r , la ecuación sería $Ci: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Las ecuaciones del eje X y del eje Y son $r: y = 0$, $s: x = 0$, respectivamente.

Por ser tangente a los dos ejes de coordenadas, $\operatorname{dist}(C, r) = \operatorname{dist}(C, s) = r \Rightarrow |b| = |a| = r \Rightarrow b = a$ ó $b = -a$

- Si $b = a$, $C(a, a)$, $Ci: (x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$. Y como tiene que pasar por $(-1, -8)$, entonces

$$(-1 - a)^2 + (-8 - a)^2 = a^2 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 + a^2 + 16a + 64 = a^2 \Rightarrow a^2 + 18a + 65 = 0$$

$$a = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 4 \cdot 1 \cdot 65}}{2 \cdot 1} = \frac{-18 \pm 8}{2}; a = -13, a = -5$$

Obtenemos entonces dos circunferencias,

$$C_1: (x + 13)^2 + (y + 13)^2 = 169 \quad \text{y} \quad C_2: (x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$$

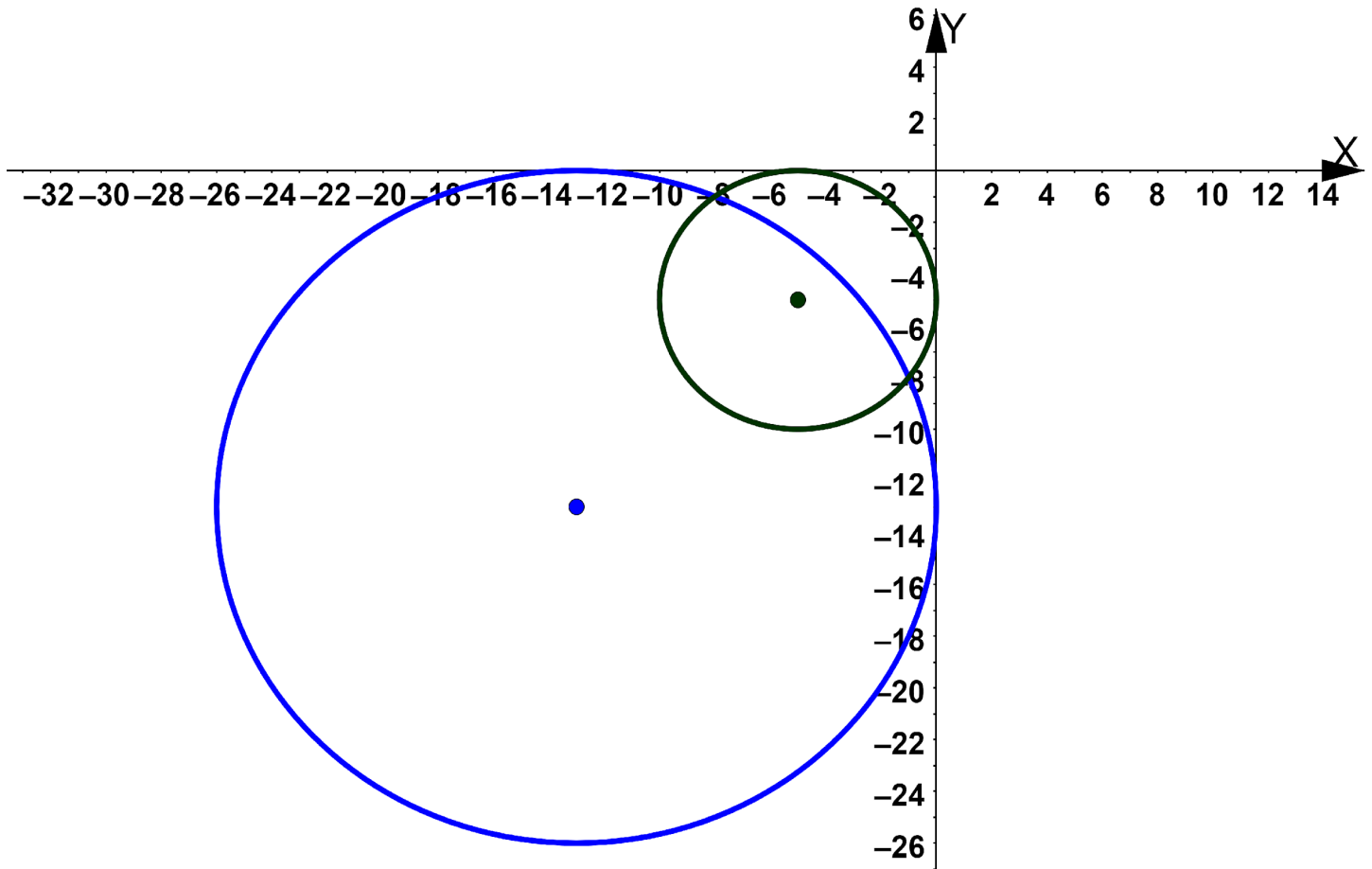
- Si $b = -a$, $C(a, -a)$, $C_i: (x - a)^2 + (y + a)^2 = a^2$. Y como tiene que pasar por $(-1, -8)$, entonces

$$(-1 - a)^2 + (-8 + a)^2 = a^2 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 + a^2 - 16a + 64 = a^2 \Rightarrow a^2 - 14a + 65 = 0$$

$$a = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 1 \cdot 65}}{2 \cdot 1} = \frac{14 \pm \sqrt{-64}}{2} \quad (\text{no tiene solución})$$

Conclusión:

Hay 2 circunferencias. Una de centro $C(-13, -13)$ y radio 13 y otra de centro $C(-5, -5)$ y radio 5



13.- (prueba ordinaria) Considera los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 2, a)$ y $\vec{w} = (2, 0, 0)$

(a) Halla los valores de a para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.

Resolución

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ son l.d.} \Leftrightarrow \det \det (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow |1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ a \ 2 \ 0 \ 0| = 0 \Leftrightarrow 2(a - 2) = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

Luego, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes $\Leftrightarrow a \neq 2$

(b) Determina los valores de a para que los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{w}$ sean ortogonales.

Resolución

$$\vec{u} + \vec{v} = (3, 3, a + 1) \text{ y } \vec{u} - \vec{w} = (-1, 1, 1) \text{ son ortogonales} \Leftrightarrow$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{w}) = 0$$

Desarrollando, $-3 + 3 + a + 1 = 0$, $a = -1$.