Преподаватель Семенова Ольга Леонидовна

Математика

Группа ТЭК 2/3

11.10.2022

Практическое занятие.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Цели:

1.**Образовательная**: формировать навыки действий над комплексными числами в тригонометрической форме.

*2.***Воспитательная***:* воспитать логическое мышление, внимание.

*3.***Развивающая***:* развитие коммуникативных качеств, критического мышления, познавательной активности студентов.

Формируемые общие и профессиональные компетенции: Материал практического занятия на тему: «Действие над комплексными числами в тригонометрической форме» формирует такие общие компетенции:

- ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
- ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
- ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
- ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
- ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
- ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
- ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.
- ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
- ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Числа в <u>тригонометрической форме</u> не складывают и не вычитают.

Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

1. Произведение <u>комплексных чисел</u> вычисляется по формуле:

$$
\begin{aligned}
&z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\
&= r_1 r_2(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)) = \\
&= r_1 r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\left(\sin\varphi_1 + \varphi_2\right)\right).
\end{aligned}
$$

<u>Пример.</u> Найти произведение комплексных чисел

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

<u>Решение:</u>

$$
\begin{aligned}
&z_1 \cdot z_2 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \\
&= 3\cdot 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right).
\end{aligned}
$$

2. Частное комплексных чисел вычисляется по формуле:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\cdot r_2(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2))=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i(\sin\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

Пример. Выполнить деление комплексных чисел.

$$z_1=10\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Решение:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{10\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{10}{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=5\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Т.е. в тригонометрической форме операции умножения и деления производятся следующим образом: для того, чтобы перемножить (разделить) два комплексных числа, нужно перемножить (разделить) их модули и сложить (вычесть) их аргументы.

Отсюда следует, что для того чтобы перемножить $\boldsymbol{n}$ комплексных чисел, нужно перемножить их модули и сложить аргументы: если φ_1, φ_2, ..., φ_n – аргументы чисел z_1, z_2, ..., z_n, то

$$\arg(z_1 z_2 \ldots z_n) = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n;$$

$$|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n|.$$

3. В частности, если все эти числа равны между собой, то получим формулу, позволяющую возводить комплексное число в любую натуральную степень.

$$z^n = \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Первая формула Муавра.

Пример

Дано комплексное число $z = 3 + \sqrt{3}i$, найти z^{20}.

<u>Решение:</u>

Сначала нужно представить данное число в тригонометрической форме.

Найдём модуль этого числа:

$$|z| = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Аргумент данного числа находится из системы:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

Значит, один из аргументов числа $z = 3 + \sqrt{3}i$ равен

$$\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Получаем:

$$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

.

Тогда, по формуле Муавра:

$$z^{20} = \left(2\sqrt{3}\right)^{20}\left(\cos\left(20\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(20\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(2\sqrt{3}\right)^{20}\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$

Считать на калькуляторе $\left(2\sqrt{3}\right)^{20}$ не нужно, а вот угол в большинстве случае следует упростить. Как упростить? Нужно избавиться от лишних оборотов. Один оборот составляет 2р радиан или 360 градусов.

Выясним сколько у нас оборотов в аргументе $\frac{10\pi}{3}$. Для удобства делаем дробь правильной: $\frac{10\pi}{3} = 3\frac{1}{3}\pi$, после чего становится хорошо видно, что можно убавить один оборот:

$$\frac{10\pi}{3} - 2\pi = 3\frac{1}{3}\pi - 2\pi = 1\frac{1}{3}\pi = \frac{4\pi}{3}.$$

Таким образом, окончательный ответ запишется так:

$$z^{20} = \left(2\sqrt{3}\right)^{20}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Можно убавить еще один оборот и получить главное значение аргумента:

$$z^{20} = \left(2\sqrt{3}\right)^{20}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

4. Для извлечения корня ***n***-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ используется вторая формула Муавра:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень из модуля комплексного числа, k=0, 1, 2,…, n-1

Домашнее задание

Разобрать решенные примеры и выполнить задание.

Записать число $z = -\sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме.

Ответы присылать на электронную почту: teacher-m2022@yandex.ru