

BÖLÜM I

Dersin Adı	Matematik	Tarih	21-25 Ekim 2024
Sınıf	10	Süre	3 ders saati
Alt Öğrenme Alanı	SAYMA ve OLASILIK		
Konu	Olasılık		

BÖLÜM II

Kazanım	10.1.2.2. Olasılık kavramı ile ilgili uygulamalar yapar.
Değerler	DÜRÜSTLÜK – Güvenilir Olma
Yöntem ve Teknikler	Düz anlatım, soru-cevap, problem çözme, örnek olay, beyin fırtınası, kavram haritası
Kullanılan Araç-Gereçler	Ders kitabı, yazı tahtası, etkileşimli tahta, z-kitap, internet, fotoğraf, pergel, cetvel

BÖLÜM III

Öğrenme-Öğretme Süreci

Olasılık Kavramı ile İlgili Uygulamalar



Bilgi

Her bir çıktısının gelme şansı eşit olan örnek uzay E ve bu örnek uzayın bir olayı A olmak üzere A olayının gerçekleşme olasılığı $P(A)$ ile gösterilir. Buradan

$$P(A) = \frac{\text{A olayının eleman sayısı}}{\text{Örnek uzayın eleman sayısı}} = \frac{s(A)}{s(E)} \text{ ile bulunur.}$$

Bu durum eş olasılıklı olmayan olaylar için geçerli değildir.

Bir A olayının olma olasılığı en az 0, en çok 1 olur. $0 \leq P(A) \leq 1$ olur.

Olasılığı 0 olan olaylara **imkânsız olay**, 1 olan olaylara **kesin olay** denir.



İpucu

Bir para atma deneyinde elde edilen basit olayların olasılıkları eşit ise bu para **hilesizdir** denir. Aynı durum zar atma deneyi için de geçerlidir.



Örnek

Hilesiz bir zarın havaya atılması deneyinde

- Üst yüze gelen sayının 3 olma olasılığını bulunuz.
- Üst yüze gelen sayının 4 olma olasılığını bulunuz.
- Üst yüze gelen sayının 7 olma olasılığını bulunuz.
- Üst yüze gelen sayının 7 den küçük bir pozitif tam sayı olma olasılığını bulunuz.



Çözüm

Örnek uzay $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $s(E) = 6$ olur.

a) A olayı, zarın üst yüzüne 3 gelmesi ise $A = \{3\}$ ve $s(A) = 1$ olur. $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{1}{6}$ olur.

b) B olayı, zarın üst yüzüne 4 gelmesi ise $B = \{4\}$ ve $s(B) = 1$ olur. $P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{1}{6}$ olur.

c) Zarda üst yüze gelen sayının 7 olması olayı boş küme olduğundan imkânsız olaydır. Bu olayın olasılığı $\frac{s(\{\})}{s(E)} = \frac{0}{6} = 0$ olur.

ç) 7 den küçük pozitif tam sayı gelme olayı, C ise $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $s(C) = 6$ olur. $C = E$ olduğundan C olayı kesin olaydır ve $P(C) = \frac{s(C)}{s(E)} = \frac{6}{6} = 1$ olur.

Yukarıda verilen örnekteki hilesiz zar deneyinde her sayının gelme olasılığı eşit olduğundan $P(A) = P(B)$ olur. Buradan A ve B olayı için eş olasılıklı durum söz konusudur.



Örnek

35 kişilik bir sınıftaki öğrencilerden 20 si kız öğrencidir. Kız öğrencilerin 12 si, erkek öğrencilerin 10 u matematik dersinden geçmiştir. Buna göre bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin erkek veya matematikten kalan bir öğrenci olma olasılığını bulunuz.



Çözüm

Örnekteki veriler tablo halinde aşağıdaki gibi gösterilebilir.

	Matematik dersinden geçen	Matematik dersinden kalan
Kız	12	8
Erkek	10	5

Tablo yardımıyla erkek olan veya matematik dersinden kalanların oluşturduğu kümenin eleman sayısının $10 + 5 + 8 = 23$ olduğu bulunur. Sınıf mevcudu 35 olduğundan bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin erkek veya matematikten kalan bir öğrenci olma olasılığı $\frac{23}{35}$ olarak bulunur.



Örnek

Bir yüzeyi beyaz, iki yüzeyi mavi ve üç yüzeyi kırmızı olan bir zar atılıyor. Bu zar atma deneyi için

- Üst yüze mavi gelmesi olasılığını bulunuz.
- Üst yüze kırmızı gelmesi olasılığını bulunuz.



Çözüm

a) 6 yüzeyden 2 si mavi olduğundan üst yüze mavi gelme olasılığı $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ olur.

b) 6 yüzeyden 3 ü kırmızı olduğundan üst yüze kırmızı gelme olasılığı $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ olur.



Bilgi

A ve B ayrık iki olay ise A veya B olayının olma olasılığı bu olayların olasılıkları toplamıdır. $P(A \text{ veya } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ olur.

A ve B ayrık olmayan iki olay ise $P(A \text{ veya } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ olur.



Örnek

Bir zar atma deneyinde asal sayı gelme olayı A, tek sayı gelme olayı B olsun. Buna göre A ve B olayı ile A veya B olaylarını bulunuz.



Çözüm

$$A = \{2, 3, 5\}, B = \{1, 3, 5\} \text{ olur.}$$

"A ve B olayı" bir deneyde hem A hem de B olayının gerçekleşmesi olayıdır. Buradan $A \cap B = \{3, 5\}$ olur.

"A veya B olayı" bir deneyde A veya B olayının gerçekleşmesi olayıdır. Buradan $A \cup B = \{2, 3, 5\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$ olur.



Örnek

Bir kutuda bulunan 10 özdeş toptan 2 si sarı, 3 ü mavi ve 5 i beyazdır. Bu kutudan rastgele alınan bir topun sarı veya beyaz olma olasılığını bulunuz.



Çözüm

Alınan topun sarı olması olayı S, beyaz olması olayı B ile gösterilsin. Bu top aynı anda hem sarı hem de beyaz olamayacağından bu olaylar ayrık olaylardır.

Bu kutudaki 10 toptan 2 si sarı olduğundan $P(S) = \frac{2}{10}$ ve 5 i beyaz olduğundan $P(B) = \frac{5}{10}$ olur.

Alınan topun sarı veya beyaz olma olasılığı ise

$$P(\text{sarı veya beyaz}) = P(S \cup B) = P(S) + P(B) = \frac{2}{10} + \frac{5}{10} = \frac{7}{10} \text{ olur.}$$



Örnek

$A = \{-3, -2, -1, 1, 2\}$ kümesinden rastgele seçilen iki sayının çarpımının pozitif bir sayı olma olasılığı- nı bulunuz.



Çözüm

$A = \{-3, -2, -1, 1, 2\}$, $s(A) = 5$ olur. A kümesinin tüm negatif elemanlarından oluşan küme B, tüm pozitif elemanlarından oluşan küme C olsun. Buradan $B = \{-3, -2, -1\}$, $s(B) = 3$ ve $C = \{1, 2\}$, $s(C) = 2$ olur.

İstenen olay, "seçilen iki sayının çarpımının pozitif olması" dir. Bunun için B den veya C den ikisi eleman seçilmelidir. B den ve C den birer eleman seçerek oluşturulan kümenin elemanları çarpımı negatif olduğundan istenen durum değildir. İstenen olayın eleman sayısı, B den veya C den ikisi eleman seçilmesi durumlarının sayısıdır.

$C(3, 2) + C(2, 2) = 3 + 1 = 4$ seçilen iki sayının çarpımının pozitif olduğu durumların sayısıdır. Örnek uzayın eleman sayısı A kümesinin 2 elemanlı alt kümeleri sayısıdır. Bu alt kümeler $C(5, 2) = 10$ tane dir.

Böylece istenen olayın olasılığı $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ olur.



Örnek

$A = \{-3, -2, -1, 1, 2\}$ kümesinden rastgele seçilen iki sayının çarpımının pozitif bir sayı olma olasılığını bulunuz.



Çözüm

$A = \{-3, -2, -1, 1, 2\}$, $s(A) = 5$ olur. A kümesinin tüm negatif elemanlarından oluşan küme B, tüm pozitif elemanlarından oluşan küme C olsun.

Buradan $B = \{-3, -2, -1\}$, $s(B) = 3$ ve $C = \{1, 2\}$, $s(C) = 2$ olur.

İstenen olay, "seçilen iki sayının çarpımının pozitif olması" dir. Bunun için B den veya C den ikişer eleman seçilmelidir. B den ve C den birer eleman seçerek oluşturulan kümenin elemanları çarpımı negatif olacağından istenen durum değildir. İstenen olayın eleman sayısı, B den veya C den ikişer eleman seçilmesi durumlarının sayısıdır.

$C(3, 2) + C(2, 2) = 3 + 1 = 4$ seçilen iki sayının çarpımının pozitif olduğu durumların sayısıdır. Örnek uzayın eleman sayısı A kümesinin 2 elemanlı alt kümeleri sayısıdır. Bu alt kümeler $C(5, 2) = 10$ tanedir.

Böylece istenen olayın olasılığı $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ olur.



Örnek

122 333 sayısındaki rakamların yerleri değiştirilerek oluşturulan 6 basamaklı farklı sayılardan herhangi biri seçiliyor. Seçilen sayının 122 333 olması olasılığını bulunuz.



Çözüm

122 333 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek oluşturulan 6 basamaklı farklı sayılar $\frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 2!} = 60$ tane olduğundan örnek uzay 60 elemanlıdır. Bu sayılardan sadece 1 tanesi 122 333 şeklindedir. Bu olaya A denilirse $A = \{122 333\}$ ve $s(A) = 1$ olur. Bu durumda A olayının gerçekleşme olasılığı,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{1}{60} \text{ olur.}$$



Örnek

$(x + y)^5$ açılımındaki terimlerden herhangi biri seçiliyor. Seçilen terimin katsayısının 10 dan küçük olması olasılığını bulunuz.



Çözüm

Seçilecek katsayılar, açılımdaki terimlerin katsayıları olan

$\binom{5}{0} = 1, \binom{5}{1} = 5, \binom{5}{2} = 10, \binom{5}{3} = 10, \binom{5}{4} = 5, \binom{5}{5} = 1$ olduğundan bu katsayılar örnek uzayı oluşturur. Buradan örnek uzayın eleman sayısı 6 dir. Seçilen terimin katsayısının 10 dan küçük olması olayına

ait elemanlar 1, 5, 5, 1 olmak üzere 4 tanedir. Bu durumda istenen olasılık,

$$\frac{\text{İstenen olayın eleman sayısı}}{\text{Örnek uzayın eleman sayısı}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ olur.}$$



İpucu

Örnek uzayın herhangi bir A olayının tümleyeni A' olmak üzere $P(A) + P(A') = 1$ olur.



Örnek

6 madeni para aynı anda atılıyor. Bu paralardan **en az** birinin diğerlerinden farklı gelme olasılığını bulunuz.



Çözüm

6 madeni para atılması deneyinin örnek uzayının eleman sayısı $s(E) = 2^6 = 64$ olur.
6 sının da aynı gelme olayı, $A = \{(Y, Y, Y, Y, Y, Y), (T, T, T, T, T, T)\}$ ve $s(A) = 2$ olur.
6 sının da aynı gelmeme olayına A' denilirse

$$\begin{aligned} P(A) + P(A') &= 1 \Rightarrow P(A') = 1 - P(A) \\ &\Rightarrow P(A') = 1 - \frac{s(A)}{s(E)} \\ &\Rightarrow P(A') = 1 - \frac{2}{64} \\ &\Rightarrow P(A') = \frac{62}{64} \\ &\Rightarrow P(A') = \frac{31}{32} \text{ olur.} \end{aligned}$$



Örnek

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi veriliyor. $A \times A$ kümesinden rastgele seçilen bir sıralı ikilinin bileşenlerinin birbirinden farklı olma olasılığını bulunuz.



Çözüm

$s(A \times A) = s(A) \cdot s(A) = 5 \cdot 5 = 25$ olduğundan örnek uzayın eleman sayısı 25 tir.
 $A \times A$ kümesinde birinci ve ikinci bileşeni aynı olan elemanlardan oluşan ikililerin kümesi B ile gösterilirse
 $B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ ve $s(B) = 5$ olur. Bu durumda bileşenlerin birbirinden farklı olma olayı B olayının tümleyenidir. Buradan
 $P(B') = 1 - P(B) \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{s(B)}{s(E)} \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{5}{25} \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{1}{5} \Rightarrow P(B') = \frac{4}{5}$ olur.



Örnek

Bir torbadaki kırmızı, mavi ve sarı bilyelerle ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

- I. Torbadan çekilen bir bilyenin mavi olması olasılığı $\frac{2}{5}$ dir.
- II. Kırmızı bilye sayısı, mavi ve sarı bilyelerin sayıları toplamına eşittir.
- III. Torbadaki sarı bilye sayısı 1 ile 5 arasındadır.

Bu bilgilere göre

- a) Torbada **en az** kaç mavi bilye olduğunu bulunuz.
- b) Torbadaki mavi ve sarı bilye sayısı arasındaki farkın **en az** kaç olduğunu bulunuz.
- c) Torbada **en çok** kaç bilye olduğunu bulunuz.



Çözüm

Kırmızı bilye sayısına k , mavi bilye sayısına m ve sarı bilye sayısına s denilirse toplam bilye sayısı $k + m + s$ dir. Kırmızı bilye sayısı, mavi ve sarı bilyelerin sayıları toplamına eşit olduğundan $k = m + s$ olur.

- a) Mavi bilye çekme olasılığı, $\frac{2}{5}$ olduğundan

$$\frac{m}{k+m+s} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{m}{k+\underbrace{(m+s)}_k} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{m}{2k} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5m = 4k \text{ olur. Buradan}$$

$m = 4$ için $k = 5$ ve $s = 1$ olur. Fakat $1 < s < 5$ olduğundan $m = 4$ olamaz.

$m = 8$ için $k = 10$ ve $s = 2$ olur. $1 < 2 < 5$ olduğundan mavi bilye sayısı en az 8 dir.

- b) Mavi bilye sayısı en az 8 olduğunda sarı bilye sayısı 2 dir. Dolayısıyla aradaki fark en az 6 dir.

- c) $m = 16$ için $k = 20$ ve $s = 4$ olur. Buradan torbadaki bilye sayısı, en çok

$$k + m + s = 16 + 20 + 4 = 40 \text{ olur.}$$



Örnek

A, B, C ikişer ikişer ayrık olayları E örnek uzayının alt kümeleridir.

$E = A \cup B \cup C$, $P(A) + P(C) = \frac{2}{7}$, $P(A) + P(B) = \frac{3}{4}$ olduğuna göre $P(A)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$$P(A) + P(C) = \frac{2}{7}$$

$$P(A) + P(B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A) + P(A) + P(B) + P(C) = \frac{2}{7} + \frac{3}{4},$$

A, B, C olayları ayrık olduğundan $A \cup B \cup C$ olayının olasılığı 1 dir. $P(A) + P(B) + P(C) = 1$

$$P(A) + 1 = \frac{29}{28} \Rightarrow P(A) = \frac{29}{28} - 1 = \frac{1}{28} \text{ olur.}$$



Örnek

A ve B aynı örnek uzaya ait ayrık iki olaydır. $P(A' \cap B') = \frac{1}{6}$ ve $P(A) = \frac{1}{3}$ olduğuna göre $P(B)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = \frac{1}{6} \text{ (De Morgan kuralından)}$$

$P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ olur. A ve B ayrık olaylar olduğundan $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ olur. Buradan

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{1}{3} + P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

BÖLÜM IV

Ölçme ve Değerlendirme

1. Bir zar atılması deneyinde zarın üst yüzüne gelen sayının asal sayı veya tek sayı olması olasılığını bulunuz.
2. 20 kişilik bir sınıftaki öğrencilerin 9 u erkektir. Bu sınıfta erkeklerin 2 si, kızların ise 4 ü esmerdir. Sınıftan rastgele seçilen birinin kız veya esmer olması olasılığını bulunuz.
3. 30 kişilik bir grupta futbol oynayan 15, basketbol oynayan 10 ve her ikisini de oynayan 6 kişidir. Bu gruptan rastgele seçilen birinin futbol veya basketbol oynama olasılığını bulunuz.
4. Bir vazoda 6 tane beyaz ve x tane kırmızı gül vardır. Vazodan bir kırmızı gül çekilme olasılığı $\frac{2}{3}$ ise x değerini bulunuz.
5. Bir zar atıldığında **görülebilir yüzeylerine** 1 veya 2 sayısının gelme olasılığını bulunuz.
6. İki zar birlikte atıldığında üst yüze gelen sayılar toplamının
 - a) 6 olma olasılığını bulunuz.
 - b) En az 6 olma olasılığını bulunuz.
 - c) 4 olmama olasılığını bulunuz.
7. n tane madenî paranın atılması deneyinde hepsinin aynı gelmeme olasılığı $\frac{127}{128}$ ise n değerini bulunuz.
8. 3 doktor, 2 hemşire arasından iki kişilik bir sağlık ekibi kurulacaktır. Bu ekipte en az bir doktorun bulunma olasılığını bulunuz.

Dersin Diğer Derslerle İlişkisi

BÖLÜM IV

Planın Uygulanmasına İlişkin Açıklamalar

Konu öngörülen ders saatinde işlenmiş olup gerekli değerlendirmeler yapılarak amacına ulaşılmıştır.

.....
.....
Matematik Öğretmeni

.../.../2024
UYGUNDUR
Okul Müdürü
.....