

Partie A : Potentiel thermodynamique

I. Quelques questions préliminaires

1. La 2^o identité thermodynamique s'écrit

$$dH = TdS + VdP$$

Or, $dH = C_{p,m}dT$ ainsi
$$dS = \frac{nC_{p,m}dT}{T} - \frac{V}{T}dP$$

2. Le système étudié est un gaz parfait, il vérifie l'équation d'état $PV = nRT$.
De plus, la transformation est isotherme : $dT = 0$.

La relation précédente devient :

$$dS = -\frac{V}{T}dP = -nR \frac{dP}{P}$$

En intégrant,

$$\Delta S = -nR \ln \frac{P_B}{P_A}$$

II. Evolution isotherme et isochore d'un système gazeux

1. $V_1 = Ax$ $V_2 = (L - x)A$

2. Equation des gaz parfaits :
- $$P_1 = \frac{n_1 RT_0}{Ax} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{n_2 RT_0}{A(L-x)} \quad \text{ainsi} \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{n_1(L-x)}{n_2x}$$

3. A l'équilibre, $P_1 = P_2$ ainsi $n_1(L-x) = n_2x$.

$$x = x_0 = \frac{n_1 L}{n_1 + n_2}$$

4. L'entropie est une grandeur extensive :

$$\Delta S(x) = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -n_1 R \ln \frac{P_{1B}}{P_{1A}} - n_2 R \ln \frac{P_{2B}}{P_{2A}}$$

$$\Delta S(x) = -n_1 R \ln \left(\frac{n_1 RT_0}{x_0 A} \frac{x A}{n_1 RT_0} \right) - n_2 R \ln \left(\frac{n_2 RT_0}{(L-x_0) A} \frac{(L-x) A}{n_1 RT_0} \right)$$

$$\Delta S(x) = -n_1 R \ln \frac{x}{x_0} - n_2 R \ln \frac{L-x}{L-x_0}$$

5. En remplaçant x par x_0 , on obtient $\Delta S(x_0) = 0$.

Lorsqu'on dérive ΔS par rapport à x ,

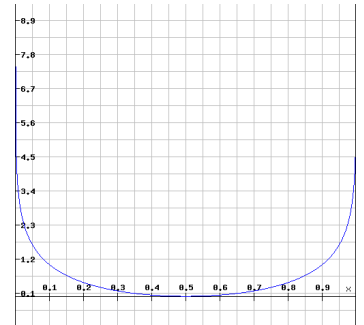
$$\frac{d\Delta S(x)}{dx} = -\frac{n_1 R}{x} + \frac{n_2 R}{L-x}$$

Si $x > x_0$, $P_2 > P_1$ donc $n_2 x > n_1 (L-x)$ et $\frac{d\Delta S(x)}{dx} > 0$

Inversement, si $x < x_0$, $\frac{d\Delta S(x)}{dx} < 0$

En $x = x_0$, $\frac{d\Delta S(x)}{dx} = 0$

Le graphe ci-contre est représenté la variation de ΔS en fonction de x .

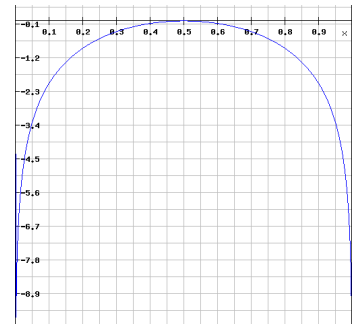


6. $\Delta F = \Delta U - T_0 \Delta S$

Dans le cas de cette transformation isotherme, $\Delta U = 0$ et

$\Delta F = -T_0 \Delta S$. ΔF évolue donc de manière opposée à ΔS .

On en déduit l'allure de la courbe $\Delta F = f(x)$.



7. La transformation est spontanée si $S_{\text{créée}}$ est positive.
Le deuxième principe s'écrit :

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}} = \frac{Q}{T_0} + S_{\text{créée}}$$

Or, $Q = \Delta U - W = 0$ car la transformation est à la fois isotherme et isochore.

Ainsi, $\Delta S = S_{\text{créée}}$.

Le 1° graphe indique que, quelle que soit la valeur de x , ΔS et donc $S_{\text{créée}}$ est toujours positive ; la transformation est donc spontanée.

La fonction F est un potentiel thermodynamique qui diminue au cours d'une transformation et qui est minimal à l'équilibre thermodynamique. Le 2° graphe montre que ΔF est négatif quel que soit x et que la valeur de x à l'équilibre est x_0 .

Partie B : Barreau de combustible nucléaire

1. Par symétrie, la température ne dépend que de la distance r à l'axe du barreau : $T(r)$. On retiendra la forme (2)

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{grad} T(r)$$

2. Considérons un cylindre de hauteur $L = 1$ m et de rayon r . La puissance thermique linéique dégagée à l'intérieur du cylindre vaut $P_{th} = p\pi r^2$.

3. La puissance dégagée est entièrement évacuée par transfert thermique car le régime est stationnaire :

$$\Phi_{th} = P_{th} = p\pi r^2.$$

4. Par définition,

$$\Phi_{th} = \iint_{cylindre} \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS} = j_{th} 2\pi r$$

donc

$$j_{th} = \frac{pr}{2}$$

5. En égalisant les deux expressions de j_{th} , on obtient

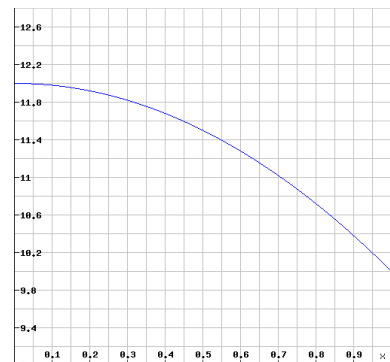
$$\frac{pr}{2} = -\lambda \frac{dT}{dr}$$

6. Cette équation différentielle s'intègre en

$$T(r) = T_0 + \frac{P}{4\lambda} (R^2 - r^2)$$

7. La température décroît avec r et est maximale pour $r = 0$ c'est-à-dire sur l'axe du barreau.

8. Le graphe est tracé ci-contre.



9. Applications numériques

- a. $T_{max} = 3933$ K

- b. $\Phi_{th}(r = R) = 62.8$ kW.m⁻¹

- c. $T_{max} = T_{fus} = 2900$ K permet de calculer la valeur maximale de R évitant la fusion du combustible MOX :

$$R_{max} = 0.012$$
 m.

- d. La valeur de R choisie est inférieure à R_{max} , elle évite donc la fusion du combustible.

Partie C : Simulation d'une inductance élevée

1. a. On applique le théorème de Millman au point N :

$$\underline{V_N} = \frac{\frac{\underline{V_P}}{R_1} + jC\omega \underline{u_S}}{\frac{1}{R_1} + jC\omega}$$

Le deuxième A.O. fonctionne en régime linéaire car la rétroaction est négative ; donc $\underline{V_N} = 0$.

Il en résulte que

$$\underline{V_P} = -jR_1 C \omega \underline{u_S}$$

- b. Le premier A.O. fonctionne aussi en régime linéaire car la rétroaction est négative donc

$$\underline{V_A} = \underline{V_B}.$$

Comme $\underline{V_A} = \underline{u_e}$, on en déduit que $\underline{V_B} = \underline{u_e}$.

On applique le théorème de Millman au point B :

$$\underline{V_B} = \frac{\frac{\underline{V_P}}{R} + \frac{\underline{u_S}}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{\underline{V_P}}{2}$$

Ainsi, $\underline{V_P} = 2\underline{u_e}$.

- c. On applique le théorème de Millman au point A :

$$\underline{V_A} = \frac{\frac{\underline{V_P}}{R_1} + \frac{\underline{u_S}}{R_2} + \underline{i_e}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

- d. Comme $\underline{V_A} = \underline{u_e}$, la relation précédente devient :

$$\underline{u_e} = \frac{\frac{\underline{V_P}}{R_1} + \frac{\underline{u_S}}{R_2} + \underline{i_e}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

De plus, $\underline{V_P} = 2\underline{u_e}$ et $2\underline{u_e} = -jR_1 C \omega \underline{u_S}$, il en résulte que

$$\frac{\underline{i_e}}{\underline{u_e}} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} + \frac{2}{jR_1 R_2 C \omega} = \underline{Y_e}$$

2. L'admittance du dipôle vaut

$$\underline{Y_e} = \frac{1}{r} + \frac{1}{jL\omega}$$

3. Par identification, on obtient

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \quad \text{et} \quad L = \frac{R_1 R_2 C}{2}$$

- 4.

Pour que l'inductance soit pure, il faut que $R_1 = R_2 = 2,0 \cdot 10^3 \, \Omega$. On en déduit $L = 30 \, \text{H}$.

L'intérêt de ce montage est de simuler des bobines qui peuvent être pures et d'inductance élevée.