

Proposition de corrigé

à l'usage exclusif des membres de l'UPA et de l'UPS

Nicolas SARD (nicolas.sard@ac-grenoble.fr) - Lycée Champollion (Grenoble)
avec la participation de Martine SANQUER**Premier problème : planètes extra-solaires et exo-biologie**

Le corrigé de ce problème reprend largement celui déjà proposé par Cédric GRANGE et a bénéficié des contributions de Rémi DEJEAN DE LA BÂTIE et de François MACQUAIRE, puis de la relecture d'Olivier ARNOULT.

I Détection d'une planète extra-solaire**I.A Troisième loi de Kepler**

1. La force d'interaction gravitationnelle, attractive, s'écrit : $\vec{F}_{e/p} = -G \frac{m_p M_e}{R^2} \vec{u}_r$.

2. On applique la deuxième de Newton à la planète dans le référentiel de l'étoile supposé galiléen : $m_p \vec{a} = \vec{F}_{e/p}$. Puisque la force de gravitation est radiale, l'accélération de la planète est également radiale.

Pour un mouvement circulaire, l'accélération s'écrit $\vec{a} = R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = R \omega \dot{\theta} \vec{u}_\theta - R \omega^2 \vec{u}_r$. Puisque cette accélération est ici radiale, on en déduit $\vec{a} = -R \omega^2 \vec{u}_r$: il s'agit d'un mouvement uniforme dont le module de l'accélération vaut bien $R \omega^2$.

3. La RFD s'écrit ainsi $R \omega^2 = G \frac{M_e}{R^2}$ soit $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = G \frac{M_e}{R^3}$ ou encore $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G M_e}$.

4. Pour la planète P, $T_p = 2\pi \sqrt{\frac{R_{ps}^3}{G M_*}}$: $T_T = 3,2 \cdot 10^7 \text{ s} = 365 \text{ jours} = 1 \text{ an}$ (comme attendu !);
 $T_M = 6,0 \cdot 10^7 \text{ s} = 693 \text{ jours} = 1,9 \text{ an}$; $T_J = 3,7 \cdot 10^8 \text{ s} = 4,3 \cdot 10^3 \text{ jours} = 11,9 \text{ an}$

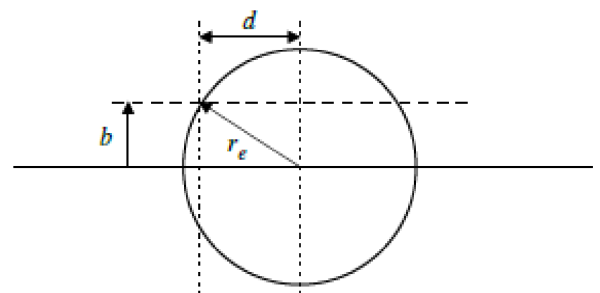
I.B Détection par la méthode des transits

5.a. La situation observée est représentée ci-contre. On peut considérer que, au cours du transit, la planète présente un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v_p .

Pour $b = 0$, la distance parcourue est $2 r_e$ et $\tau_e = \frac{2 r_e}{v_p}$.
Pour $b \neq 0$, la distance parcourue est $2 d$ avec (théorème

de Pythagore) $d = \sqrt{r_e^2 - b^2}$ d'où :

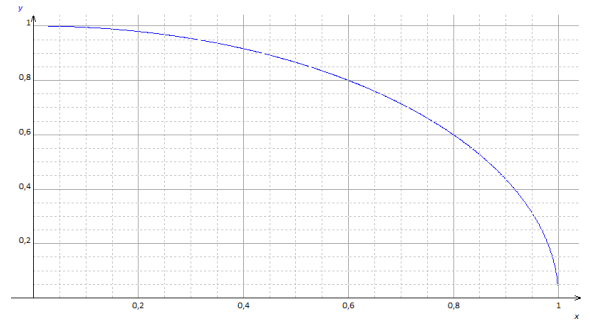
$$\tau(b) = \frac{2}{v_p} \sqrt{r_e^2 - b^2} = \frac{\tau_e}{r_e} \sqrt{r_e^2 - b^2} \text{ soit } \tau(b) = \tau_e \sqrt{1 - \left(\frac{b}{r_e}\right)^2}.$$



5.b. On a représenté ci-contre $y = \frac{\tau}{\tau_e}$ en fonction de $x = \frac{b}{r_e}$

On suppose que chaque éclipse est caractérisée par une élévation b aléatoire, avec la même probabilité pour chaque valeur. On peut alors exploiter le résultat précédent en remarquant que $y = 0,80$ pour $x = 0,60$: 60% de ces trajectoires ont une durée d'éclipse supérieure à 80% de τ_e .

On peut aussi remarquer que $y = 0,87$ pour $x = 0,50$: plus de la moitié de ces trajectoires ont bien une durée d'éclipse supérieure à 80% de la durée τ_e .



6. Reprenons l'expression vue en 5.a, dans laquelle il faut exprimer la vitesse de la planète. Elle se déduit de la

troisième loi de Kepler : puisque le mouvement circulaire est uniforme, $v_p = \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{GM_e}{R}}$ ce qui conduit

$$\text{bien à } \tau_e = 2r_e \sqrt{\frac{R}{GM_e}}.$$

7. La phase transitoire correspond aux durées d'entrée et de sortie de la planète au sein du disque de l'étoile,

$$\text{c'est-à-dire une distance } 4r_p \text{ parcourue à la vitesse } v_p : \tau_p = 4r_p \sqrt{\frac{R}{GM_e}}.$$

8. La condition $\tau_p \ll \tau_e$ est réalisée si $2r_p \ll r_e$, ce qui semble raisonnable pour une planète et une étoile.

9. Le flux surfacique J émis par l'étoile est une constante : le flux détecté par le télescope est proportionnel à la

$$\text{surface visible de l'étoile, soit } J = \frac{\Phi}{\pi r_e^2} = \frac{\Phi'}{\pi (r_e^2 - r_p^2)} \text{ et alors } \Delta\Phi = \Phi - \Phi' = \pi r_p^2 J \text{ puis } \frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \frac{r_p^2}{r_e^2}.$$

10. Pour la Terre : $\tau_e = 4,7 \cdot 10^4 \text{ s} = 13 \text{ h}$; $\tau_p = 860 \text{ s} = 14 \text{ min}$ (on a bien $\tau_p \ll \tau_e$) et $\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = 8,4 \cdot 10^{-5}$ ce qui rend la Terre difficile à détecter depuis un autre système stellaire.

Pour Jupiter : $\tau_e = 1,1 \cdot 10^5 \text{ s} = 30 \text{ h}$; $\tau_p = 2,1 \cdot 10^4 \text{ s} = 5,8 \text{ h}$ (on n'a plus $\tau_p \ll \tau_e$) et $\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = 9,7 \cdot 10^{-3} \approx 1\%$ ce qui semble permettre la détection de cette planète depuis un autre système stellaire.

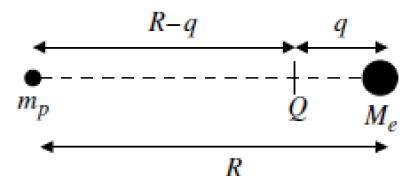
11. D'autres astres peuvent transiter entre l'étoile et l'observateur et provoquer une variation du flux lumineux. On peut aussi envisager une fluctuation de l'émission stellaire du fait d'une tempête stellaire.

12. Le passage de la planète devant l'étoile est périodique. La variation de flux peut donc être distinguée d'une fluctuation inattendue par son caractère périodique.

I.C Détection par décalage Doppler

13. D'après la définition du barycentre (situation rappelée ci-contre) :

$$m_p (R - q) = M_e q \Rightarrow q = \frac{m_p R}{M_e + m_p}.$$



14. Le système étoile-planète tourne autour du centre de masse Q (fixe) avec une période T inchangée. Ainsi,

$$v = \frac{2\pi q}{T} = \sqrt{\frac{GM_e}{R^3}} \frac{m_p R}{M_e + m_p} \quad \text{soit} \quad v = \frac{m_p}{M_e + m_p} \sqrt{\frac{GM_e}{R}}$$

15.a. Supposons que le champ électrique de l'onde soit à son maximum, au niveau de l'étoile, à $t=0$. Ce maximum est perçu par l'observateur (supposé fixe) se trouvant à la distance d à la date $t = \frac{d}{c}$. Le maximum

suivant est émis à la date T_0 au niveau de l'étoile et il est perçu à la date $t' = T_0 + \frac{d'}{c}$. La période apparente de l'onde perçue par l'observateur est ainsi $\Delta t = t' - t = T_0 + \frac{d' - d}{c}$ avec $v_a = \frac{d' - d}{T_0}$ d'où $\Delta t = T_a = T_0 + \frac{v_a}{c}$

T_0 . Comme longueur d'onde et période sont liées par $\lambda = c T$, on en déduit $\Delta\lambda = \frac{v_a}{c} \lambda_0$.

15.b. L'expression précédente peut s'écrire $\frac{v_a}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$.

15.c. Pour une vitesse v_a positive, étoile qui s'éloigne de l'observateur selon la convention choisie, la longueur d'onde augmente, ce qui correspond à un décalage vers le rouge.

16.a. Pour le système Terre-Soleil : $q = 450 \text{ km}$; $v = 9,0 \text{ cm.s}^{-1}$; $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 3,0 \cdot 10^{-10}$ soit $\Delta\lambda = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ nm}$ pour une longueur d'onde de 500 nm.

Il manque dans l'énoncé la masse de Jupiter : $M_J = 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

Pour le système Jupiter-Soleil : $q = 740 \cdot 10^3 \text{ km}$; $v = 12 \text{ m.s}^{-1}$; $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 4,1 \cdot 10^{-8}$ soit $\Delta\lambda = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ nm}$ pour une longueur d'onde de 500 nm.

16.b. Les effets, plus prononcés pour Jupiter (du fait de sa masse très supérieure à celle de la Terre), restent très faibles et ne peuvent pas être observés en TP.

16.c. Les vitesses de l'étoile sont très faibles devant la vitesse de la lumière : l'approximation non relativiste est tout à fait applicable.

II Recherche de vie sur des planètes extra-solaires

II.A Limites de la zone habitable

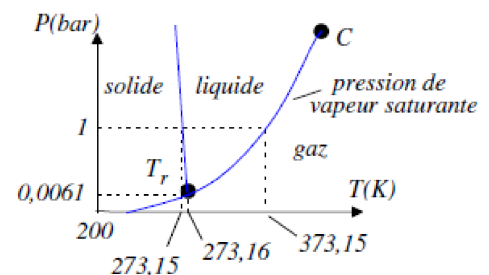
17.a. Voir ci-contre.

17.b. Le point triple T_r correspond à l'équilibre simultané des trois phases de l'eau.

17.c. Pour l'eau, la pente de la courbe de fusion est négative (exception qui s'explique par une masse volumique plus faible pour le solide que pour le liquide à une température voisine de 0°C : un glaçon flotte dans un verre d'eau).

La courbe de fusion, en plus de passer par le point triple, passe par le point ($T = 273,15 \text{ K}$; $P = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$), température de fusion à pression ambiante : alors que la pression est multipliée par un facteur 150, la température varie seulement de 0,01 K soit une variation relative de l'ordre de 10^{-5} . La courbe est donc quasiment verticale, on peut retenir $T = 273 \text{ K}$ pour la température de changement d'état.

17.d. Pour obtenir de l'eau liquide, il faut ainsi $T_{\min} = 273 \text{ K}$.



18.a. L'étoile émet un flux $\Phi_e = 4 \pi r_e^2 \sigma T_e^4$ qui, à la distance R de l'étoile, se répartit sur la sphère centrée sur l'étoile, de rayon R et d'aire $4 \pi R^2$. La planète n'intercepte que la partie du flux qui traverse son disque d'aire

$$\pi r_p^2, \text{ d'où } \Phi_{e/p} = \Phi_e \frac{\pi r_p^2}{4 \pi R^2} \text{ soit } \Phi_{e/p} = r_e^2 \sigma T_e^4 \frac{\pi r_p^2}{R^2}.$$

18.b. Sa température étant supposée uniforme, la planète émet un flux total $\Phi_{\text{tot},p} = 4 \pi r_p^2 \sigma T_p^4$.

18.c. En l'absence d'apports internes et en supposant la planète à l'équilibre thermique, les flux doivent

$$\text{s'égaliser, les apports devant compenser les pertes : } r_e^2 \sigma T_e^4 \frac{\pi r_p^2}{R^2} = 4 \pi r_p^2 \sigma T_p^4 \Rightarrow T_p = T_e \sqrt{\frac{r_e}{2 R}}.$$

19. De la relation précédente on déduit $R_{\min} = \frac{r_e}{2} \left(\frac{T_e}{T_{\max}} \right)^2$ et $R_{\max} = \frac{r_e}{2} \left(\frac{T_e}{T_{\min}} \right)^2$.

20. $R_{\min} = 0,58 \text{ ua}$ et $R_{\max} = 1,0 \text{ ua}$. La présence d'une atmosphère créant un effet de serre naturel augmente en fait la température de la Terre obtenue par le calcul précédent, ce qui décale la zone d'habitabilité vers des orbites un peu plus élevées que celles trouvées.

II.B Bio-signature d'une présence de vie

21. Le volume élémentaire d'atmosphère d'épaisseur dz et de surface S est soumis à :

- son poids $d \overset{\vee}{P} = dm \overset{\vee}{g} = -\rho S dz g \overset{\vee}{u}_z$

- la résultante des forces pressantes verticales $d \overset{\vee}{f} = [P(z) S - P(z+dz) S] \overset{\vee}{u}_z$ qui devient, par développement limité au premier ordre, $d \overset{\vee}{f} = -dP S \overset{\vee}{u}_z$

La somme de ces deux forces est nulle à l'équilibre, ce qui conduit, après projection sur l'axe vertical, à $-\rho S dz g - dP S = 0$ soit $dP = -\rho(z) g dz$.

Notons que les résultantes des forces pressantes sont nulles sur les axes horizontaux et que la pression ne dépend que de l'altitude.

22. En assimilant l'atmosphère à un gaz parfait, on déduit d'abord de l'équation d'état $P V = n R T$

l'expression $\rho(z) = \frac{P(z) \mu}{R T_p}$: avec une température T_p uniforme, $\rho(z)$ et $P(z)$ sont proportionnelles et la relation

de la statique des fluides peut s'écrire $\frac{R T_p}{\mu} d\rho = -\rho g dz \Leftrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\mu g}{R T_p} dz = -\frac{dz}{H}$.

L'intégration entre le sol et une altitude z quelconque donne bien $\rho(z) = \rho(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$.

23. Exprimons la force d'interaction gravitationnelle, exercée par la planète sur un objet de masse m au niveau

du sol : $\overset{\vee}{F} = -m G \frac{m_p}{r_p^2} \overset{\vee}{u}_z$ d'où $g = G \frac{m_p}{r_p^2}$ par définition du champ de pesanteur.

Pour une planète sphérique homogène de masse volumique ρ_p , on a par ailleurs $m_p = \frac{4}{3} \pi r_p^3 \rho_p$ ce qui conduit

à $g = G \frac{4}{3} \pi r_p \rho_p$ puis à $H = \frac{R T_p}{\mu} \frac{3}{4 \pi G \rho_p} \frac{1}{r_p}$: H est bien inversement proportionnelle à r_p .

24.a. $H = 7,9 \text{ km}$

24.b. On constate que $H \ll r_T$: l'hypothèse considérant que g est uniforme est justifiée.

25. Puisque $H \ll r_p$, on peut considérer que l'atmosphère couvre une surface $2\pi r_p H$. En reprenant le raisonnement de la question 9, on exprime la diminution de flux due à cette couche : $\Delta\Phi_{\text{at}} = J 2\pi r_p H (1 - \varepsilon)$.

$$\frac{\Delta\Phi_{\text{at}}}{\Phi} = \frac{2 r_p H}{r_c^2} (1 - \varepsilon).$$

La variation relative s'écrit alors

26.a. Il s'agit d'un spectrophotomètre.

26.b. Le flux lumineux autour de la longueur d'onde λ_i est, après traversée de l'atmosphère de la planète,

$\Phi_i = \eta \Phi_e \frac{r_p H}{2 R^2} \varepsilon_i$. L'observateur en capte la fraction $\frac{\pi \delta^2 / 4}{4 \pi d^2}$ (rapport de la surface d'entrée du télescope à la surface de la sphère centrée sur l'étoile et sur laquelle se répartit le flux lumineux).

On en déduit $E_i = \eta \Phi_e \frac{r_p H}{2 R^2} \varepsilon_i \frac{\delta^2}{16 d^2} \frac{\lambda_i}{h c} \tau_e$ puis $\Delta E = \eta \Phi_e \frac{r_p H}{32 R^2} \frac{\delta^2}{d^2} \frac{1}{h c} (\varepsilon_2 \lambda_2 - \varepsilon_1 \lambda_1) \tau_e$.

27.a. L'écart-type est la racine carrée de la variance, ici égale à la moyenne E_i des mesures. Pour chaque bande

du spectre, on a ainsi $\sigma_i^2 = \eta \Phi_e \frac{r_p H}{32 R^2} \frac{\delta^2}{d^2} \frac{1}{h c} \varepsilon_i \lambda_i \tau_e$.

27.b. On mesure la différence entre les deux énergies et le « bruit minimum » b est lié à leurs fluctuations qui

doivent être composées : $b^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \eta \Phi_e \frac{r_p H}{32 R^2} \frac{\delta^2}{d^2} \frac{1}{h c} (\varepsilon_2 \lambda_2 + \varepsilon_1 \lambda_1) \tau_e$.

27.c. Le signal peut être perturbé par des photons provenant d'autres systèmes et par la diffusion dans l'atmosphère de l'observateur.

28.a. Avec les expressions précédentes, $\text{RSB} = \sqrt{\eta \Phi_e \frac{r_p H}{32 R^2} \frac{\delta^2}{d^2} \frac{1}{h c} \tau_e} \frac{\varepsilon_2 \lambda_2 - \varepsilon_1 \lambda_1}{\sqrt{\varepsilon_2 \lambda_2 + \varepsilon_1 \lambda_1}}$: **RSB = 59**

28.b. Ce rapport est tout à fait suffisant pour espérer détecter correctement ce genre de phénomène, mais ce télescope n'est pas encore en service, et on a négligé toutes les autres sources de bruit.

On peut noter que :

- plus le temps de transit est long, plus le rapport signal sur bruit augmente : c'est assez général dans les processus de mesure, l'incertitude se réduit en augmentant le nombre de mesures ;
- plus l'atmosphère est épaisse, plus c'est aisé ;
- le RSB est proportionnel au diamètre du télescope et il est inversement proportionnel à la distance à l'étoile ;
- les longueurs d'onde choisies sont intéressantes, car le dioxygène y présente une bande d'absorption assez étroite, ce qui permet d'augmenter le RSB via $(\varepsilon_2 \lambda_2 - \varepsilon_1 \lambda_1)$.

28.c. Il faut observer pendant un temps long avant de détecter un transit : il est donc préférable de d'abord rechercher les étoiles possédant un système planétaire (avec les moyens actuels) avant d'engager la prochaine génération d'instruments dans la détection de la présence de dioxygène.

29. L'expression de ΔE (puis, en conséquence, celles de b et du RSB) fait apparaître le produit $r_p H$ qui, comme cela a été établi à la question 23, est une constante : l'augmentation du diamètre s'accompagne d'une diminution de la couche atmosphérique et le RSB est constant.

30.a. L'éclipse est observable si $\beta < \beta_{\max}$ tel que (avec la figure 2 et pour le cas choisi) $\sin \beta_{\max} = \frac{r_e}{R_{\min}} = 2 \left(\frac{T_{\max}}{T_e} \right)^2$. Ce résultat étant très inférieur à l'unité, on peut écrire $\beta_{\max} = 2 \left(\frac{T_{\max}}{T_e} \right)^2$.

La probabilité d'observation vaut $p = \frac{\beta_{\max}}{\pi/2} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{T_{\max}}{T_e} \right)^2$ et $p^M = \frac{4}{\pi} \left(\frac{T_{\max}}{T_e^M} \right)^2 = \frac{4}{\pi} \left(2 \frac{T_{\max}}{T_e^G} \right)^2$ soit, effectivement, $p^M = 4 p^G$.

30.b. Les seuls paramètres modifiés dans l'expression de RSB sont le flux lumineux émis par l'étoile Φ_e et la durée d'éclipse τ_e . RSB est proportionnel à $\sqrt{\Phi_e \tau_e}$ donc à $r_e^{3/2} T_e^2 M_e^{-1/4}$. On a ainsi **RSB^M = 0,058 RSB^G** : la détection de la présence de dioxygène est plus délicate pour une étoile de type M que pour une étoile de type G (*cohérent avec la question suivante !*). RSB^M = 3,4 demeure tout de même une valeur raisonnable pour observer l'existence du dioxygène dans l'atmosphère.

30.c. On a vu en 30.a que la probabilité de détection d'exo-planètes est plus importante autour d'une étoile de type M, probabilité augmentée par leur plus grand nombre dans la galaxie. Repérées plus facilement, ces planètes sont ainsi privilégiées dans la recherche de conditions favorables à la vie.

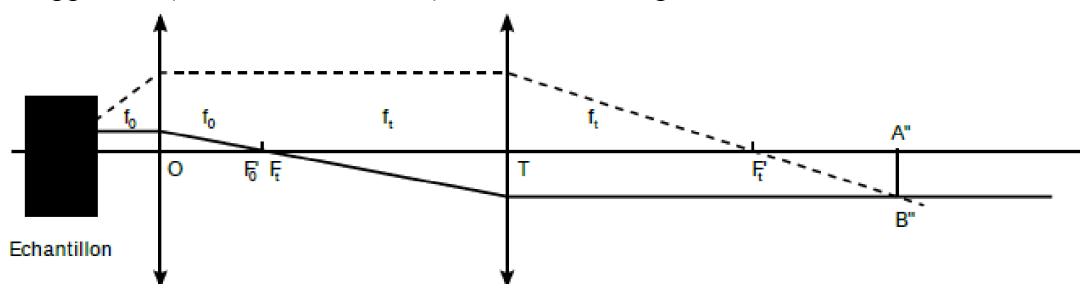
Second problème : microscopie

L'énoncé note f les distances focales images qu'il aurait été préférable de noter f' .

I Le microscope de fluorescence plein champ

I.A Système 4f

1. Sur la figure ci-dessous (*extraite du rapport du jury*), le trait plein est issu du point B et parallèle à l'axe optique : il émerge de L_0 en passant par F'_0 . Ce point étant confondu avec F_t , il émerge de la seconde lentille parallèlement à l'axe optique. Le trait en pointillés passe par F_0 et B : il émerge de L_0 parallèlement à l'axe optique puis il émerge de L_t en passant par F'_t . L'intersection des deux rayons émergents donne le point B'' puis, par aplanétisme approché (conditions de Gauss), on en déduit la position de A'' .



2. On utilise les propriétés des triangles semblables de sommet $F'_0 \equiv F_t$: $\gamma_t = - \frac{f_t}{f_0}$.
Ce grandissement transversal est négatif : l'image est renversée.

3. En notant H la distance entre l'axe optique et le rayon en pointillé, entre L_0 et L_t , on a, dans les triangles semblables de sommet F'_t , $\frac{\varepsilon''}{f_t} = - \frac{A''B''}{H}$ et, dans les triangles semblables de sommet F_0 , $\frac{\varepsilon}{f_0} = \frac{AB}{H}$.

On en déduit $\varepsilon'' = -\frac{f_t}{f_o} \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} \varepsilon$ d'où, avec l'expression du grandissement, $\varepsilon'' = \left(\frac{f_t}{f_o}\right)^2 \varepsilon$.
 Une image nette sur le photodétecteur placé dans le plan focal image de L_t correspond à $\varepsilon'' = 0$: on doit alors avoir $\varepsilon = 0$ et les points de l'échantillon sont situés sur le plan focal objet de L_o (voir figure 2 !).

4.a. AN : $\gamma_t = -40$

4.b. Les images sont distinguées par la caméra si elles se forment sur des pixels différents. Pour deux molécules placées en ε et en $\varepsilon + \Delta_p x$, les images se forment en ε'' et en $\gamma_t^2 (\varepsilon + \Delta_p x) = \gamma_t^2 \varepsilon + \gamma_t^2 \Delta_p x = \varepsilon'' + \gamma_t^2 \Delta_p x$: elles

sont distantes de $\gamma_t^2 \Delta_p x$ et cette distance doit au minimum être égale à δ d'où $\Delta_p x = \frac{\delta}{\gamma_t^2} = \delta \left(\frac{f_o}{f_t}\right)^2$.
AN : $\Delta_p x = 6,3 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 6,3 \text{ nm}$

5.a. Pour que les taches de diffraction ne se recouvrent pas sur le détecteur, leurs centres doivent être distants d'au moins $\Delta x''$. Comme les positions des centres sont données par le grandissement transversal, on a $\Delta x'' =$

$$\frac{\lambda f_t}{D} = |\gamma_t| \Delta x = \frac{f_t}{f_o} \Delta x \text{ d'où } \Delta x = \frac{\lambda f_o}{D} = \frac{\lambda}{2 \text{ ON}}.$$

5.b. En notant α l'angle au sommet du cône de la figure 2, on peut écrire :

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{D/2}{f_t} = \frac{\Delta x''/2}{\Delta z''/2} \text{ d'où } \Delta z'' = \frac{2 f_t}{D} \Delta x'' = 2 \lambda \left(\frac{f_t}{D}\right)^2$$

Compte tenu des hypothèses mentionnées, le diamètre de la tache lumineuse sur le détecteur est inchangé tant

$$\text{que } |\varepsilon''| \leq \frac{1}{2} \Delta z'' \text{ pour } |\varepsilon| \leq \frac{1}{2} \Delta z \text{ soit, à la limite, } \left(\frac{f_t}{f_o}\right)^2 \Delta z = 2 \lambda \left(\frac{f_t}{D}\right)^2 \text{ d'où } \Delta z = \frac{\lambda}{2 \text{ ON}^2}.$$

5.c. AN : $\Delta x = 3,4 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 340 \text{ nm}$ et $\Delta z = 4,5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 450 \text{ nm}$

On constate que $\Delta x > \Delta_p x$: la résolution du microscope est limitée par la diffraction et non par la pixellisation du détecteur.

I.B Section optique

6.a. Le point B appartenant au plan focal objet de L_o , on observe entre les deux lentilles un faisceau de lumière parallèle limité par le diaphragme, faisceau qui converge ensuite dans le plan focal image de L_t :

Dans le cadre de l'approximation de Gauss, on peut écrire $\tan \beta \approx \beta \approx \frac{D}{f_t}$ quelle que soit la position du point B : l'angle au sommet du cône est bien indépendant de x .

6.b. Lorsque $|\varepsilon| < \Delta z / 2$, on observe une tache de rayon $r_1 = \Delta x'' / 2$ en raison du phénomène de diffraction. Lorsque $|\varepsilon| > \Delta z / 2$, on conserve la donnée de la question 5.b (la géométrie du faisceau est la même que précédemment, translatée axialement de ε''). Le diamètre r de la tache est alors donné par l'optique géométrique

$$\text{avec } \beta \approx \frac{D}{f_t} \approx \frac{2r}{\varepsilon''} = \frac{2r}{|\varepsilon|} \left(\frac{f_o}{f_t}\right)^2 \text{ d'où } r_2 = \text{ON} \frac{f_o}{f_t} |\varepsilon|.$$

6.c. Puisque le flux est uniforme, la fraction collectée par un pixel est le rapport de la surface δ^2 de ce pixel à la surface de la tache lumineuse πr^2 .

$$\text{Ainsi, } \eta_1 = \frac{4 \delta^2 D^2}{\pi \lambda^2 f_t^2} \text{ lorsque } |\varepsilon| < \Delta z / 2 \text{ et } \eta_2 = \frac{\delta^2}{\varepsilon^2 \pi \text{ON}^2} \left(\frac{f_o}{f_t}\right)^2 \text{ lorsque } |\varepsilon| > \Delta z / 2.$$

La distinction entre les molécules se trouvant ou non dans le plan focal de l'objectif peut se faire en fonction de l'énergie lumineuse collectée par le pixel (exploitation du contraste).

7.a. Une molécule fluorescente émet l'énergie lumineuse F_m et cette énergie se répartit, au niveau du détecteur,

sur une tache dont le rayon r a été exprimé en 6.b : on a $I_m = \frac{F_m}{\pi r^2}$.

7.b. Si $|\varepsilon| < \Delta z / 2$, le point P reçoit de la lumière des différentes taches de diffraction le recouvrant. Ces taches ayant le même diamètre $\Delta x''$, tous les points fluorescents dont l'image géométrique est contenue dans un disque de ce diamètre contribuent à l'éclairement en P . En reprenant l'étude menée en 5.a, on en déduit que tous ces

points sont contenus dans un disque de rayon $\frac{\Delta x}{2} = \frac{\lambda}{4 ON}$. On en déduit $N = C_0 \pi \left(\frac{\lambda}{4 ON} \right)^2$ le nombre de molécules fluorescentes contribuant à l'éclairement en P .

Si $|\varepsilon| > \Delta z / 2$, on reste dans la description de 5.b : la géométrie du faisceau est la même que précédemment, translatée axialement de ε'' . Le point P est alors éclairé par tout point fluorescent dont le cône de lumière contient P , et ce cône a pour sommet l'image géométrique et pour angle au sommet l'angle β vu en 6.b. Symétriquement (principe du retour inverse de la lumière), le point P est éclairé par tous les points fluorescents dont l'image se situe dans un cône de sommet P et d'angle β , soit dans un disque de rayon r_2 vu en 6.b. En utilisant la définition du grandissement transversal, on en déduit que les points fluorescents éclairant P sont

dans un disque de rayon $\frac{r_2}{|\gamma_t|} = ON |\varepsilon|$ avec $N = C_0 \pi ON^2 \varepsilon^2$.

7.c. On additionne les contributions des N molécules : $I_{\text{tot}} = N I_m$.

Pour $|\varepsilon| < \Delta z / 2$, $I_{\text{tot}} = C_0 \pi \left(\frac{\lambda}{4 ON} \right)^2 \frac{F_m}{\pi} \frac{4}{\Delta x''^2}$ soit $I_{\text{tot}} = C_0 F_m \left(\frac{f_o}{f_t} \right)^2$.

Pour $|\varepsilon| > \Delta z / 2$, $I_{\text{tot}} = C_0 \pi ON^2 \varepsilon^2 \frac{F_m}{\pi} \left(\frac{f_o}{f_t} \right)^2 \left(\frac{1}{ON \varepsilon} \right)^2$ soit $I_{\text{tot}} = C_0 F_m \left(\frac{f_o}{f_t} \right)^2$.

7.d. On constate que les deux expressions de I_{tot} sont les mêmes : chaque pixel est éclairé de manière uniforme, et reçoit ainsi le même flux lumineux quelle que soit la valeur de ε .

7.e. Compte tenu du résultat précédent, on constate l'absence de contraste entre les différents plans fluorescents : le critère vu en 6.c n'est plus utilisable.

7.f. Le « bruit de fond » correspond à ce qui vient d'être vu, qu'il soit issu du plan focal ou non. Le pouvoir de section optique ne permet pas de l'éliminer et donc d'extraire l'information voulue (voir l'introduction de la partie II...).

II Le microscope confocal

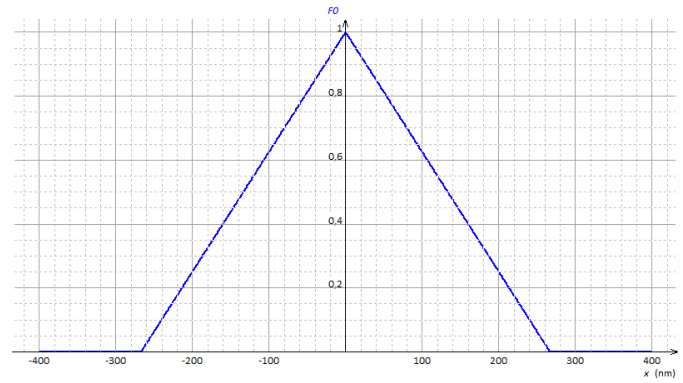
8. Le trajet du faisceau bleu décrit ici est complètement symétrique de celui étudié à la question 5. En utilisant le principe du retour inverse de la lumière, on peut bien écrire $\Delta u = \Delta x$ et $\Delta w = \Delta z$ qui sont les dimensions caractéristiques du côté de l'objectif.

9. La molécule fluorescente doit d'abord être éclairée par le faisceau bleu : compte tenu de ce qui précède, cela impose $|x| \leq \Delta x / 2$. Dans ce cas, comme vu dans la question 5, le détecteur recevra un signal non nul.

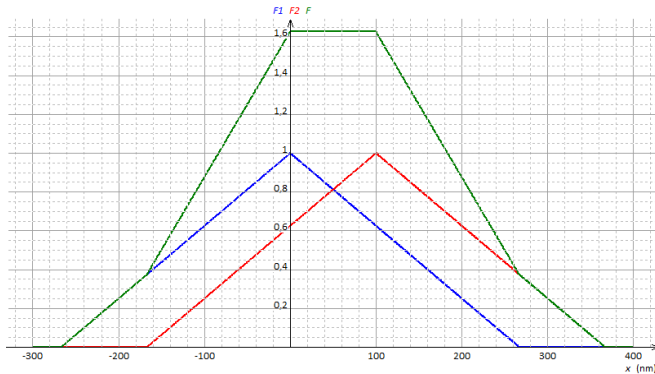
10. Reprenons la figure tracée en 6.a : lorsque la molécule B s'éloigne de l'axe optique, son image B'' s'éloigne également (en sens inverse). Avec les hypothèses utilisées dans le problème, cela implique que son « tronc de diffraction » suit le déplacement de B'' et que le flux d'énergie traversant le trou 2 diminue.

11. Tous les autres paramètres étant constants, F_m^{conf} est directement liée à la fonction $|x|$ et on obtient l'allure ci-contre où on a représenté

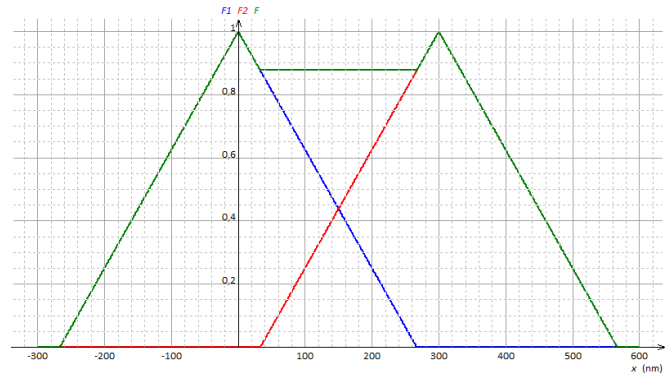
$$F_0 = \frac{F_m^{\text{conf}}}{\alpha \beta I_e^{\text{max}}} \text{ en fonction de } x.$$



12.a. Les flux des deux molécules s'additionnent, ce qui conduit aux allures ci-dessous.



molécules « proches » ($h = 100 \text{ nm}$)



molécules « éloignées » ($h = 300 \text{ nm}$)

12.b. Comme on le voit sur les graphiques précédents, on obtiendra un maximum ne permettant pas de distinguer les deux molécules si elles sont trop proches, et deux maxima si elles sont suffisamment éloignées.

Le flux à mi-hauteur est obtenu pour $\frac{4}{\pi} \frac{|x|_{\min}}{\Delta x} = \frac{1}{2}$ soit $|x|_{\min} = \frac{\pi}{8} \Delta x$ d'où $h_{\min} = 2 |x|_{\min} = \frac{\pi}{4} \Delta x$ (lorsque le maximum dû à la première molécule est perçu, il n'y a pas encore d'énergie reçue de la part de la seconde molécule).

12.c. La limite de résolution latérale est Δx pour le microscope plein champ : elle est légèrement améliorée (légèrement plus faible) dans le cas du microscope confocal.

12.d. On a maintenant $h_{\min} = 2,7 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 270 \text{ nm}$

13.a. Pour $|\varepsilon| < \Delta z / 2$, le « tronc » dû à la diffraction intercepte le trou 2 de la même manière que lorsque $x = 0$: on retrouve la condition établie en 9 : $|x| \leq \Delta x / 2$.

Pour $|\varepsilon| > \Delta z / 2$, le trou 2 doit être situé dans le cône de lumière dont le sommet est l'image géométrique de la molécule. De la lumière parvient au détecteur comme cela a été vu en 7.b, pour $|x| \leq ON |\varepsilon|$.

13.b. La lumière incidente se répartit sur un cône de sommet F_0 et de rayon r tel que, à la distance ε du plan

focal (triangle homothétiques de sommet F_0) : $\frac{r}{\varepsilon} = \frac{D}{2f_0} = ON$.

Par conservation de l'énergie lumineuse, on peut par ailleurs écrire $I_e^{\text{max}} \pi \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 = I_e \pi r^2 = I_e \pi (\varepsilon ON)^2$. En

utilisant la relation $\Delta x = \Delta z ON$ établie en 5.b, on obtient $I_e = I_e^{\text{max}} \left(\frac{\Delta z}{2\varepsilon} \right)^2$.

13.c. On a $F_m = \alpha \beta I_e$ soit $F_m = \alpha \beta I_e^{\text{max}} \left(\frac{\Delta z}{2\varepsilon} \right)^2$.

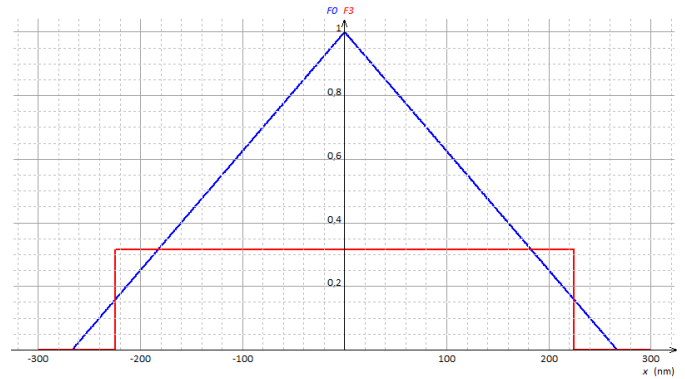
La fraction collectée par le détecteur est liée à la section du cône lumineux au niveau du trou 2 (disque de rayon

$$r_2 \text{ vu en 6.b) et à la section du trou 2 : } F_m^{\text{conf}} = F_m \left(\frac{\Delta x''}{2 r_2} \right)^2 \text{ soit } F_m^{\text{conf}} = \alpha \beta I_e^{\text{max}} \left(\frac{\Delta z}{2 \varepsilon} \right)^4 .$$

13.d. Pour $\varepsilon = 0$, on retrouve le graphique vu à la question 11.

Pour $|\varepsilon| > \Delta z / 2$, le flux est uniforme tant que la condition $|x| \leq ON |\varepsilon|$ est satisfaite, et nul sinon. Il est tracé ici pour $|\varepsilon| = 300 \text{ nm}$.

13.e. Pour une molécule hors du plan focal, l'énergie lumineuse captée est en $1/\varepsilon^4$: elle diminue beaucoup plus rapidement avec ε que dans le cas du microscope plein champ où elle est en $1/\varepsilon^2$. Cela permet d'obtenir des images plus contrastées.



13.f. Le microscope confocal permet ainsi de mieux distinguer une molécule située dans le plan focal d'une autre hors du plan focal (*on s'en doutait !*).

14.a. Toutes les molécules situées dans un disque de rayon $ON |\varepsilon|$ (voir 13.a) contribuent au flux lumineux

$$\text{capté par le détecteur : } F_{\text{tot}}^{\text{conf}}(\varepsilon) = C_0 \pi (\varepsilon ON)^2 F_m^{\text{conf}} \text{ soit } F_{\text{tot}}^{\text{conf}}(\varepsilon) = C_0 \pi ON^2 \alpha \beta I_e^{\text{max}} \left(\frac{\Delta z}{2} \right)^4 \frac{1}{\varepsilon^2} .$$

14.b. Alors qu'on avait vu en 7.d. que le flux reçu par le détecteur était indépendant de ε pour le microscope plein champ, ce flux est maintenant proportionnel à $1/\varepsilon^2$ pour le microscope confocal. Ce dispositif permet ainsi d'éliminer le « bruit de fond » dû aux molécules situées hors du plan focal : il possède un pouvoir de section optique.