Занятие № Группа ХКМ 1/1 Дата: 19.02.2024

Тип занятия: комбинированное занятие

Тема занятия: «Неопределенный и определенный интегралы»

Цель занятия:

Деятельностная:

 формирование у учащихся умений находить площадь криволинейной трапеции при помощи формулы Ньютона-Лейбница.

Содержательная:

- сформировать представление о криволинейной трапеции;
- расширить знания учеников за счет включения новых определений: криволинейная трапеция; новой формулы формулы Ньютона-Лейбница;
- познакомиться с задачами вычисления площади криволинейной трапеции.

Оборудование занятия: доска, учебник.

План занятия:

- 1. Определение неопределённого интеграла.
- 2. Свойства неопределенного интеграла
- 3. Геометрический смысл неопределенного интеграла.
- 4. Первичное закрепление знаний

Актуализация знаний

Для функции f(x)=2(x-1):

- а) найдите общий вид первообразных;
- б) напишите первообразную, график которой проходит через точку A(2;4) Решение:

$$f(x)=2(x-1)=2x-2;$$

$$F(x)=2x^2/2-2x+C=x^2-2x+C;$$

$$A(2;4) \Rightarrow 4=2^2-2\cdot 2+C=4-4+C=C;$$

$$C=4; \Rightarrow F(x)=x^2-2x+4;$$

Для функции f(x)=2(x-1):

- а) найдите общий вид первообразных;
- б) напишите первообразную, график которой проходит через точку A(2;4) Решение:

$$F(x)=(x-1)^2+C$$
,

 $4=(2-1)^2+C\Rightarrow C=4-1=3$, и $F(x)=(x-1)^2+3$ — первообразная, график которой проходит через точку A(2;4).

Определение неопределённого интеграла.

Если функция y = f(x) имеет на промежутке X первообразную y = F(x), то множество всех первообразных, т. е. множество функций y = F(x) + C называется неопределенным интегралом от функции y = f(x) и обозначается

$$\int f(x)dx$$

f(x) – подынтегральная функция.

f(x)dx – подынтегральное выражение,

С – постоянной интегрирования,

х – переменной интегрирования.

Операцию нахождения неопределенного интеграла от данной функции, которая является обратной операции дифференцирования, называют интегрированием.

Свойства неопределенного интеграла

- 1. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- 2. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C$

Обобшим свойство линейности

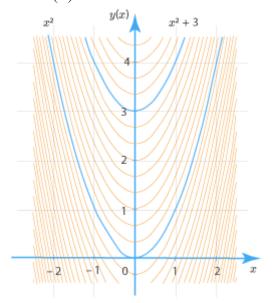
Если функции f(x) и g(x) имеют на некотором промежутке первообразные, то для любых $\alpha \in R$, $\beta \in R$ таких, что $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, функция $\phi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ также имеет первообразную на этом промежутке, причем

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x)$$
 (1)

□ Пусть F и G — первообразные для функций f и g соответственно, тогда Φ = α F+ β G — первообразная для функции ϕ , так как $(\alpha$ F(x)+ β G(x))'= α f(x)+ β g(x). Согласно определению интеграла левая часть (1) состоит из функций вида Φ (x)+C, а правая часть — из функций вида F(x)+ α C₁+ β G(x)+ β C₂= Φ (x)+ α C₁+ β C₂. Так как α ₂+ β ₂≠0, то каждая функция вида Φ (x)+C принадлежит совокупности функций Φ (x)+ α C₁+ β C₂, и наоборот, то есть по заданному числу C можно найти C₁ и C₂, а по заданным C₁ и C₂ — число C такое, чтобы выполнялось равенство C= α C₁+ β C₂. ■

Геометрический смысл неопределенного интеграла.

C геометрической точки зрения неопределенный интеграл — это совокупность (семья) линий F(x)+C:



Первичная проверка знаний.

- 0. Обозначения и термины.
 - ∫ значок интеграла.
 - f(x) подынтегральная функция.
 - dx значок дифференциала.

- f(x)dx подынтегральное выражение.
- F(x) первообразная функция.
- F(x) + C множество первообразных функций.
- 1. Чему равен неопределенный интеграл от 1?
 - 1) x+C;
 - 2) C;
 - 3) 1+C;
 - 4) 0.
- 2. Чему равен неопределенный интеграл sin(x)?
 - 1) $-\cos(x)+C$;
 - $2) \cos(x) + C;$
 - 3) tg(x)+C;
 - 4) $\arcsin(x)+C$.
- 3. Чему равен неопределенный интеграл от нуля?
 - 1) 0;
 - 2) 1;
 - 3) C;
 - 4) x.
- 4. Какая функция называется первообразной функцией для данной?
- 5. Что такое неопределённый интеграл от функции?

Примеры

1. Найти ∫f(х)dх, если:

$$f(x)=e^x+x^2$$

Используя таблицу производных и свойства интеграла, получаем $\int (e^x + x^2) dx = e^x + x^3/3 + C$.

2. Найти $\int f(x) dx$ и выполнить проверку, если:

$$\int \cos(3x - \frac{\pi}{6})dx = \frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + c$$

$$\left(\frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + c\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + c' = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = f(x)$$

3. Найти $\int f(x) dx$ и выполнить проверку, если:

$$\int (3-x^5)dx = \int 3dx - \int x^5 dx = 3x - \frac{x^6}{6} + c$$
$$\left(3x - \frac{1}{6}x^6 + c\right)' = 3 - \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot x^5 + c' = 3 - x^5 = f(x)$$

4. Найти неопределённый интеграл:

$$\int x^2 (3+4x)^2 dx$$

Решение:

Анализируя интеграл, видно, что имеется произведение двух функций и возведения в степень целого выражения. Так как нет хороших и удобных формул для интегрирования произведения и частного надо попытаться преобразовать подынтегральную функцию в сумму.

$$\int x^{2}(3+4x)^{2} dx =$$

$$\int x^{2}(9+24x+16x^{2}) dx =$$

$$\int (9x^{2}+24x^{3}+16x^{4}) dx =$$

$$9 \int x^{2} dx +24 \int x^{3} dx +16 \int x^{4} dx =$$

$$9 \cdot \frac{1}{3}x^{3}+24 \cdot \frac{1}{4}x^{4}+16 \cdot \frac{1}{5}x^{5}+C =$$

$$3x^{3}+6x^{4}+\frac{16}{5}x^{5}+C =$$

5. Найти неопределённый интеграл:

$$\int \sqrt[3]{x^2} dx$$

Решение

$$\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx$$

Согласно таблице интегралов:

$$\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + C$$

OTBET:
$$\int \sqrt[3]{x^2} \, dx = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + C$$

Домашнее задание:

- 1. Законспектировать основные теоретические сведения.
- 2. Ответить на вопросы для закрепления
- 3. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва [и др.]. − 10-е изд., стер. − Москва : Просвещение, 2022. − 463 §56 с. 297-298 №999 (3,4)

Выполненную работу необходимо сфотографировать и отправить на почтовый ящик pushistaV@yandex.ru, Бережная Валерия Александровна (VK)

ОБЯЗАТЕЛЬНО ПОДПИСЫВАЕМ РАБОТУ НА ПОЛЯХ + в сообщении указываем дату/группу/ФИО