Jean-Marie DELORME Jean-Marie.Delorme@univ-orleans.fr
François-Xavier COQ Francois-Xavier.Coq@univ-orleans.fr
Lycée POTHIER ORLEANS

Toute remarque sera la bienvenue

1999 CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE MP PHYSIQUE 1

A-Mouvements d'une particule en contact avec une cuvette paraboloïque

1.Moment cinétique

a) Avec les coordonnées cylindriques: $\boldsymbol{OM} = \rho\, \boldsymbol{e_\rho} + z\, \boldsymbol{e_z}$, , d'où $\boldsymbol{v}(M) = \dot{\rho}\, \mathbf{e_\rho} + \rho\, \dot{\varphi}\, \mathbf{e_\varphi} + \dot{z}\, \mathbf{e_z}$.

b) Le moment cinétique en O s'écrit: $\mathbf{L_O} = m\, \boldsymbol{OM} \wedge \boldsymbol{v}(M)$, d'où:

$$\mathbf{L_O} = m\, [\, \rho^2\, \dot{\varphi}\, \mathbf{e_z} + (z\, \dot{\rho} - \rho\, \dot{z})\, \mathbf{e_\varphi} - \rho\, z\, \dot{\varphi}\, \mathbf{e_\rho}\,].$$

La projection selon l'axe Oz est alors: $\boxed{L_{Oz} = m\, \rho^2\, \dot{\varphi}}$.

c) $\mathbf{R}$ est normal au plan tangent et il y a invariance par rotation autour de l'axe Oz, donc le vecteur normal est dans le plan OHP. On en déduit que $\mathbf{R}.\mathbf{e_\varphi} = \mathbf{0}$.

La dérivée de la composante de $\mathbf{L}_O$ selon $\mathbf{e_z}$ est alors:

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \frac{d(\mathbf{L_O}.\mathbf{e_z})}{dt} = [\boldsymbol{OM} \wedge (\mathbf{R} + m\, \boldsymbol{g})].\mathbf{e_z} = (\mathbf{e_z} \wedge \boldsymbol{OM})\, .\, (\mathbf{R} + m\, \boldsymbol{g})$$

$$...= \rho\, \mathbf{e_\varphi} \wedge (\mathbf{R} + m\, \boldsymbol{g}) = \mathbf{0}.$$

On en déduit que L_{Oz} est une constante, donc que: $\boxed{m\, \rho^2\, \dot{\varphi} = \text{cste} = L}$.

On suppose que la constante L est homogène à un moment cinétique, mais ce n'est pas précisé.

2.Energie

a) $E_K = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\, m\, [\, \dot{\rho}^2 + \rho^2\, \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2]$

b) Les forces extérieures sont:

la réaction $\mathbf{R}$ qui ne travaille pas puisqu'il y a glissement sans frottement

le poids qui dérive de l'énergie potentielle $m\, g\, z + cste$.

On en déduit l'énergie potentielle: $\boxed{E_P = m\, g\, z = m\, g\, \frac{\rho^2}{a}}$ puisque $E_P(0) = 0$ et qu'on suppose la particule en contact avec le support, donc: $\rho^2 = a\, z$.

c) Les forces étant conservatives, l'énergie mécanique de M est une constante:

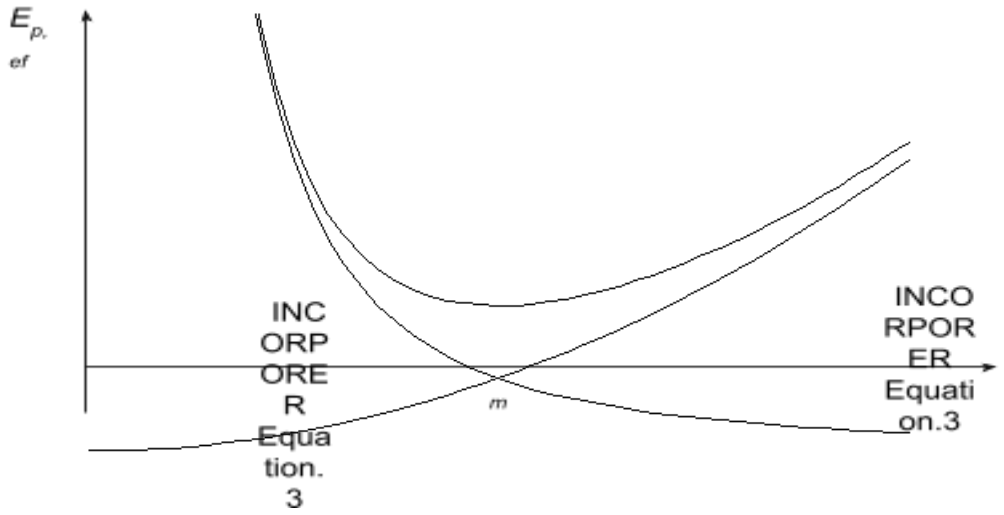
$\boxed{E_m = E_K + E_P = cste}$.

3.Discussion générale du mouvement

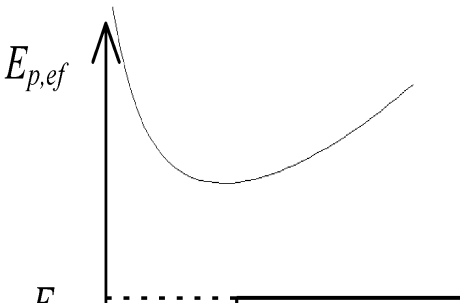
a) $E_m = E_K + E_P = \frac{1}{2}\, m\, [\, \dot{\rho}^2 + \rho^2\, \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2] + m\, g\, \frac{\rho^2}{a}$, avec: $z = \frac{\rho^2}{a}$, donc: $\dot{z} = 2\, \frac{\rho\, \dot{\rho}}{a}$, et $\dot{\varphi} = \frac{L}{m\, \rho^2}$, ce qui donne: $E_m = \boxed{\frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left[1 + 4\frac{\rho^2}{a^2}\right] + mg\frac{\rho^2}{a} + \frac{L^2}{2m\rho^2}}$, qui est de la forme $E_m = \frac{1}{2}\, m\, \dot{\rho}^2\, G(\rho) + E_{p,ef}(\rho)$, avec:

$G(\rho) = 1 + 4\,\frac{\rho^2}{a^2}$ et $E_{p,ef}(\rho) = m\,g\,\frac{\rho^2}{a} + \frac{L^2}{2\,m\,\rho^2}$.

b) Le graphe de $E_{p,ef}(\rho)$ est le suivant, somme d'une courbe en ρ^2 et d'une autre en $\frac{1}{\rho^2}$:



$\frac{dE_{p,ef}}{d\rho} = \frac{2\,m\,g\,\rho}{a} - \frac{L^2}{m\,\rho^3} = 0$ pour $\rho_m = \left(\frac{L^2 a}{2m^2 g}\right)^{\frac{1}{4}}$, qui correspond à l'égalité des deux termes de $E_{p,ef}$.



c) $E_m = \frac{1}{2}\,m\,\dot{\rho}^2\,G(\rho) + E_{p,ef}(\rho)$, avec $G(\rho) = 1 + 4\,\frac{\rho^2}{a^2} > 0$, donc: $E_m \geq E_{p,ef}(\rho)$.

On cherche alors les valeurs de ρ qui vérifient cette équation. On constate qu'on doit avoir $E_m \geq E_{p,ef}(\rho_m)$, et dans ce cas, ρ est compris entre deux valeurs ρ_{min} et ρ_{max}, correspondant à deux cercles d'altitude $z_{min} = \frac{\rho_{min}^2}{a}$ et $z_{max} = \frac{\rho_{max}^2}{a}$. ρ_{min} et ρ_{max} sont solution de l'équation: $E_m = E_{p,ef}(\rho)$.

4.Etude de quelques mouvements particuliers

a) La trajectoire est une parabole méridienne si $\phi = cste$, donc $\dot{\phi} = 0$. La relation $L = m\,\rho^2\,\dot{\phi}$ s'écrit alors $L = 0$.

b) La trajectoire de M est un cercle horizontal si $\dot{z} = 0$. Alors $z = cste = \frac{\rho^2}{a}$. On en déduit que $\rho = cste$, ce qui n'est possible que pour $\rho = \rho_m = \left(\frac{L^2 a}{2m^2 g}\right)^{\frac{1}{4}}$. De plus $L = m\,\rho^2\,\dot{\varphi} = \text{cste}$ impose $\dot{\varphi} = cste = \dot{\varphi}_0$.

On a alors: $\dot{\varphi}_0 = \frac{L}{m\rho^2} = \frac{L}{m}\sqrt{\frac{2m^2 g}{L^2 a}} = \sqrt{\frac{2g}{a}}$.

Conclusion: on doit lancer la particule avec la vitesse $\mathbf{v_0} = \dot{\varphi}_0\,\mathbf{e_\varphi}$ telle que $\dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{2g}{a}}$, en n'importe quel point (ce qui n'était pas évident à priori). La constante L est alors définie par la valeur initiale de ρ_0.

c) En posant $\varepsilon = \rho - \rho_m$, on fait un développement limité de $E_{p,ef}(\rho)$ autour de ρ_m au deuxième ordre en ε. Il vient: $E_{p,ef}(\rho) = E_{p,ef}(\rho_m) + \varepsilon \left(\frac{dE_{p,ef}}{d\rho}\right)_{\rho=\rho_m} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{d^2E_{p,ef}}{d\rho^2}\right)_{\rho=\rho_m}$.

Or $\left(\frac{d^2E_{p,ef}}{d\rho^2}\right) = \frac{2mg}{a} + \frac{3L^2}{m\rho^4}$, donc: $\left(\frac{d^2E_{p,ef}}{d\rho^2}\right)_{\rho=\rho_m} = \frac{8mg}{a}$.

Puisque $G(\rho) = 1 + 4\frac{\rho^2}{a^2} = 1 + 4\frac{\rho_m^2}{a^2}$ (à l'ordre zéro qui nous intéresse ici), on déduit l'expression de l'énergie mécanique: $E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2\left[1+4\frac{\rho_m^2}{a^2}\right] + E_{p,ef}(\rho_m) + \frac{4mg}{a}\varepsilon^2$.

L'énergie mécanique est constante, sa dérivée par rapport au temps est nulle. En notant que $\dot{\rho} = \dot{\varepsilon}$, $\ddot{\rho} = \ddot{\varepsilon}$ et en simplifiant par $\dot{\varepsilon}$ (puisque l'expression est valable pour tout $\dot{\varepsilon}$), on obtient:

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{8g}{a}\frac{1}{1+\frac{4\rho_m^2}{a^2}}\varepsilon = 0$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 telle que: $\omega_0^2 = \frac{8g}{a}\frac{1}{1+\frac{4\rho_m^2}{a^2}}$, et donc de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{8g}\left(1+\frac{4\rho_m^2}{a^2}\right)}$, soit numériquement: $\underline{T_0 = 1{,}42\ \text{s}}$.

5.Réalisation du contact

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à M s'écrit: $m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\,\mathbf{g} + R\,\mathbf{e_n}$.

$\frac{v^2}{\rho_c}$

En projection sur la normale à la trajectoire: m $= m\,\mathbf{g.n} + R$ où ρ_c est le rayon de courbure (positif). Or $\mathbf{g.n} < 0$, donc R est la somme de deux termes positifs: $R > 0$.

6. Dans la pratique, il y a des frottements qui font diminuer l'énergie mécanique, jusqu'à obtenir la valeur minimale qui correspond au repos ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$) en $z = 0$, donc ρ tend vers ρ_m, qui est le fond de la cuvette.

La réaction tangentielle de la cuvette n'a plus un moment nul selon Oz, donc L n'est plus une constante. L^2 diminue au cours du temps, ce qui décale le minimum du graphe $E_{p,ef}(\rho) = m\,g\,\frac{\rho^2}{a} + \frac{L^2}{2\,m\,\rho^2}$ vers la gauche, donc ρ_m tend vers 0. On en déduit que $\rho_{final} = 0$.

B-Bilans énergétique et entropique de solides conducteurs en thermodynamique

1.Bilans énergétique et entropique de deux solides métalliques mis en contact

a) $c_{v,1} = \frac{C_{vm}}{M_1}$ et $c_{v,2} = \frac{C_{vm}}{M_2}$ où M_1 et M_2 sont les masses molaires respectivement du fer et du cuivre.

$c_{v,1} = 447$ J.K^1.kg^1 et $c_{v,2} = 393$ J.K^1.kg^1.

(Les capacités thermiques sont: $c_1 = 179$ J.K^1 et $c_2 = 78{,}6$ J.K^1)

Les capacités thermiques molaires sont identiques car au niveau atomique, les mouvements sont les mêmes: il y a 3 degrés de liberté pour les vibrations et 3 pour les rotations, soit au total 6, ce qui donne: $C_{vm} = 6\,\frac{R}{2} = 3\,R$ (modèle de Dulong et Petit si T n'est pas trop faible).

b) Entre t et $t + dt$, nous avons, pour l'ensemble des deux solides: $dH = \delta H^e + \delta H^p$ où δH^e est le terme d'échange et δH^P le terme de production.

Comme le système est isolé thermiquement, il n'y a pas d'échange thermique avec l'extérieur: $\delta H^e = 0$.

D'autre part: $dH = dH_1 + dH_2 = c_1\,dT_1 + c_2\,dT_2$.

On en déduit, entre t_1 et t_2: $H^e = 0$ et $H^p = \Delta H = c_1\,(T_f - T_1) + c_2\,(T_f - T_2)$.

De plus, à pression constante, $\Delta H = Q$ où Q est le transfert thermique reçu par le système: $Q = 0$.

On en déduit: $T_f = \frac{c_1\,T_1 + c_2\,T_2}{c_1 + c_2}$ soit: $T_f = 435$ K.

Le système étant isolé, l'enthalpie (ou l'énergie interne) produite est nulle (grandeurs conservatives).

c) Entre t_1 et t_2, la variation d'entropie s'écrit: $\Delta S = S^e + S^p$ où S^e est l'entropie échangée, ici $S^e = 0$ (système isolé thermiquement) et S^P l'entropie produite.

De plus, $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$, avec: $\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_f} c_1 \frac{dT}{T} = c_1 \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right)$ et $\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_f} c_2 \frac{dT}{T} = c_2 \ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right)$. ($S$ étant une fonction d'état, on peut imaginer une autre transformation réversible pour faire le calcul de sa variation).

Donc: $S^e = 0$ et $\Delta S = S^p = c_1 \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right) + c_2 \ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right)$. $\Delta S = 6{,}33$ J.K^1.

Bien sûr, $\Delta S > 0$ car le système isolé subit une transformation irréversible.

2.Bilans énergétique et entropique dans une barre de fer sans déperdition latérale

a) Dans un état stationnaire, les variables d'état sont indépendantes du temps. C'est le cas ici.

Dans un état d'équilibre, les variables d'état sont uniformes (les mêmes en tout les points).

La résistance électrique d'un cylindre de longueur L, de section $A = \pi \frac{D^2}{4}$ et de conductivité électrique γ est: $R_e = \frac{L}{\gamma A}$. Par analogie, la résistance thermique s'écrit: $R_u = \frac{L}{\lambda A}$, soit: $R_u = 460.10^3$ K.W^{-1}.

b) Pendant la durée dt, la variation d'entropie est: $dS = \delta S^e + \delta S^p$. L'entropie reçue (algébriquement) est en x: $\frac{\delta Q(x)}{T(x)}$ et en $x + dx$: $\frac{\delta Q(x+dx)}{T(x+dx)}$ où $\delta Q(x) = \delta Q(x + dx) = \delta Q$ est le transfert thermique le long du cylindre, indépendant de x en régime stationnaire. D'après la loi de Fourier: $\delta Q = \lambda \frac{dT}{dx} A\, dt$. Donc:

$$\delta S^e = \delta Q \left(\frac{1}{T(x)} - \frac{1}{T(x+dx)}\right) = \delta Q\, d\left(\frac{1}{T}\right) = \delta Q \frac{1}{T^2}\frac{dT}{dx}\, dx \text{ soit: } \delta S^e = \frac{\lambda}{T(x)^2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 A\, dx\, dt.$$

c) En régime stationnaire, l'entropie de la tranche dx est une constante, donc $\delta S = 0$. On en déduit l'entropie produite: $\delta S^p = \delta S^e$. On pose $\delta S^p = \sigma_S A\, dx\, dt$, ce qui donne:

$$\sigma_S = \frac{\lambda}{T(x)^2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2.$$

Remarque: ce résultat n'est pas lié au régime stationnaire, on peut le démontrer pour tout régime.

Le gradient de température étant uniforme le long de la barre, il vient: $\frac{dT}{dx} = \frac{T_a - T_f}{L}$.

En $x = 0$: $\sigma_S(0) = \frac{\lambda}{T_f^2}\left(\frac{T_f - T_a}{L}\right)^2$, soit: $\sigma_S(0) = 1{,}46$ W.K^{-1}.m^{-3}.

En $x = L$: $\sigma_S(L) = \frac{\lambda}{T_a^2}\left(\frac{T_f - T_a}{L}\right)^2$, soit: $\sigma_S(0) = 3{,}96$ W.K^{-1}.m^{-3}.

On trouve bien sûr que l'entropie créée est la plus grande là où la température extérieure est la plus petite, car elle est de la forme $\frac{\delta Q}{T_{ext}}$.

d) Le courant volumique d'énergie dans la diffusion thermique est $J_u = \lambda \frac{dT}{dx}$ (analogie avec l'électrocinétique où $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} = \gamma\, \mathbf{grad}\, V$). On déduit: $\sigma_S = \frac{\lambda}{T(x)^2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 = \lambda \frac{dT}{dx}\left(-\frac{1}{T^2}\frac{dT}{dx}\right) = J_u \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T}\right)$

de la forme $\alpha J_u F_u$, avec: $F_u = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T}\right)$ et $\alpha = 1$.

Numériquement: $J_u = 2{,}39.10^3$ W.m^{-2}.

$F_u(0) = \frac{\sigma_S(0)}{J_u} = 6{,}1.10^4$ K^{-1}.m^{-1} et $F_u(L) = \frac{\sigma_S(L)}{J_u} = 16{,}6.10^4$ K^{-1}.m^{-1}.

3.Bilans énergétique et entropique dans une barre avec déperdition latérale

a) L'équation proposée provient d'un bilan énergétique: la variation d'énergie entre x et $x + dx$ est égale à l'énergie qui entre en x moins celle qui sort en $x + dx$, moins l'énergie qui sort latéralement.

ρ est la masse volumique du métal, en kg.m^3 ; c_v est la capacité thermique massique, en J.K^1.kg^1; λ est la conductivité thermique, en W.m^1.K^1; h_S est le coefficient surfacique de transfert thermique, par unité de longueur à la paroi, en W.K^1.m^3 (d'après l'homogénéité de l'équation).

Les deux termes sont des termes d'échange, il n'y a pas de terme de production.

b) En régime stationnaire: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, donc: $\lambda \frac{d^2T}{dx^2} = h_S (T - T_a)$. En posant $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{\lambda}{h_S}}}$ (δ est homogène à une longueur, il vient: $\frac{d^2(T - T_a)}{dx^2} - \frac{T - T_a}{\delta^2} = 0$, qui s'intègre en: $T(x) - T_a = A \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(\frac{x}{\delta}\right)$.

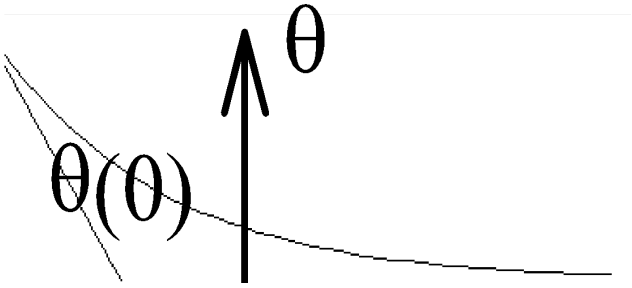
De plus, les conditions aux limites sont: $T(0) = T_f$ et si $x \to \infty$, $T(x) \to T_a$, donc:

$$\boxed{T - T_a = (T_f - T_a) \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right).}$$

c) Nous avons: $\theta(x) = \theta(0) \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$, en posant $\theta(0) = T_f - T_a$.

$l_{1/2}$ est défini par $\theta(l_{1/2}) = \frac{\theta(0)}{2}$, ce qui donne: $l_{1/2} = \delta \ln 2 = \sqrt{\frac{\lambda}{h_S}} \ln 2$, d'où:

$h_S = \frac{\lambda(\ln 2)^2}{(l_{1/2})^2}$, soit: $\underline{h_S = 769\ \text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-3}}$.



Le graphe de $\theta(x)$ est:

d) $F_u = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{1}{T^2}\frac{dT}{dx}$, avec

$T(x) = T_a + (T_f - T_a) \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$., d'où:

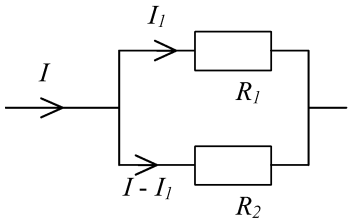
$$F_u = \frac{T_f - T_a}{\delta} \frac{1}{T^2} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right).$$

En $x = 0$: $F_u(0) = \frac{T_f - T_a}{\delta} \frac{1}{T_f^{\,2}}$, soit:

$\underline{F_u(0) = 5{,}5.10^3\ K^{-1}.m^3}$.

En $x = L$: $T(L) \to T_a$ et $\exp\left(-\frac{x}{\square}\right) \to 0$, d'où: $\underline{F_u(L) = 0}$.

4.Bilans énergétique et entropique dans des conducteurs ohmiques



a) Pour chacune des conducteurs C_1 et C_2, l'énergie électrique reçue est ensuite perdue par effet Joule (transfert thermique vers l'extérieur).

b) Pour le conducteur C_1, la variation d'entropie pendant dt est: $dS_1 = \delta S_1^e + \delta S_1^p$, avec en régime permanent: $dS_1 = 0$, et: $\delta S_1^e = \dfrac{\delta Q_{1reçu}}{T_{ext}} = \dfrac{-R_1 I_1^2\, dt}{T_a}$, donc: $\delta S_1^p = \dfrac{R_1 I_1^2\, dt}{T_a}$.

De même: $0 = dS_2 = \delta S_2^e + \delta S_2^p$ et $\delta S_2^p = \dfrac{R_2(I-I_1)^2 dt}{T_a}$.

c) L'~~entropie produite pendant~~ dt est alors: $\delta S^p = \dfrac{R_1 I_1^2 dt}{T_a} + \dfrac{R_2(I-I_1)^2 dt}{T_a}$, et l'entropie créée par unité de temps est: $\Sigma_S = \dfrac{R_1 I_1^2 + R_2(I-I_1)^2}{T_a}$.

La dérivée de Σ_S par rapport à I_1 (en supposant I constant) vaut: $\dfrac{d\Sigma_S}{dI_1} = \dfrac{2}{T_a}(R_1 I_1 - R_2 (I - I_1))$, qui s'annule pour $I_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} I$ et qui correspond à une valeur minimale de l'entropie créée.

Cette valeur correspond à $R_1 I_1 = R_2 (I - I_1)$, qui est l'<u>égalité des tensions</u> aux bornes des deux résistances: la « nature » s'arrange pour que l'entropie créée soit la plus faible possible.

d) Avec $I_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} I$ et $I - I_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} I$, il vient: $\Sigma_S = \dfrac{R_1 R_2 I^2}{(R_1 + R_2) T_a}$ qui est de la forme $\dfrac{R I^2}{T_a}$, avec $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ qui est la résistance équivalente aux deux résistances en parallèle.

On retrouve les résultats connus en électrocinétique.

Application numérique: $\underline{\Sigma_S = 2{,}67.10^3\ W.K^{-1}}$.