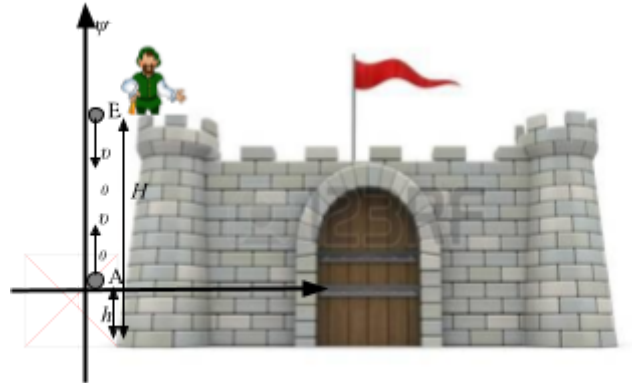


Επίθεση στο κάστρο

Στη μάχη για την κατάκτηση ενός κάστρου ένας λεγεωνάριος, όταν βρέθηκε στη βάση του τείχους, ύψους $H = 4m$, ρίχνει πέτρα, κατακόρυφα προς τα πάνω, με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0 = 8m/s$, από σημείο A σε υψόμετρο $h = 1m$ πάνω από το έδαφος.



α) Θα φτάσει η πέτρα στο σημείο B, που βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το A και αντιστοιχεί στην κορυφή του τείχους;

β) Αν ναι ποια θα είναι η ταχύτητα της πέτρας στο σημείο B;

γ) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος από το έδαφος που θα φτάσει η πέτρα;

δ) Αν η πέτρα επιστρέψει στο σημείο βολής A, τι ταχύτητα θα έχει;

ε) Ένας χωρικός, υπερασπιστής του τείχους, εκτοξεύει από το σημείο B, προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα ίδιου μέτρου $v_0 = 8m/s$ δεύτερη πέτρα, η οποία κινείται ανάμεσα στα ίδια σημεία με την πρώτη. Ποια θα είναι η ταχύτητά της όταν φτάνει στο σημείο A;

ε) Αν οι δύο σφαίρες εκτοξευτούν ταυτόχρονα, σε ποιο ύψος από το έδαφος θα μπορούσαν να συναντηθούν;

στ) Να γίνουν τα διαγράμματα θέσης –χρόνου σε κοινούς άξονες για τις δύο πέτρες.

Δίνεται $g = 10m/s^2$ και η αντίσταση του αέρα αμελητέα.

Απάντηση

α) Η πέτρα που εκτοξεύει ο λεγεωνάριος εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω. Θεωρούμε κατακόρυφο άξονα $\psi\psi'$ με θετική φορά προς τα πάνω και αρχή το σημείο A.

Τη στιγμή της εκτόξευσης $\psi_{0\lambda} = 0$, $v_{0\lambda} = +v_0 = +8m/s$, $a_\lambda = -g = -10m/s^2$.

Όταν φτάνει στο σημείο B $\psi_\lambda = H-h = +3m$.

$$\psi_\lambda = \psi_{0\lambda} + v_{0\lambda}t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \Leftrightarrow 3 = 0 + 8t - 5t^2$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 - 8t + 3 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0,6s \quad t_2 = 1,4s$$

Και οι δύο χρονικές στιγμές είναι θετικές άρα θα φτάσει στην κορυφή του τείχους.

Γιατί όμως δύο λύσεις;

β) Ας υπολογίσουμε την ταχύτητα που αντιστοιχεί σε κάθε μια:

$$v_{1\lambda} = v_0 - gt_1 = 8 - 10 \cdot 0,6 = 2m/s$$

$$v_{2\lambda} = v_0 - gt_2 = 8 - 10 \cdot 1 = -2m/s$$

Τι σημαίνουν αυτές οι τιμές; Ότι τη χρονική στιγμή t_1 η πέτρα κινείται κατά τη θετική φορά (ανεβαίνει), ενώ τη χρονική στιγμή t_2 η πέτρα κατεβαίνει ξαναπερνώντας από το ύψος του τείχους.

γ) Η χρονική στιγμή που φτάνει στο μέγιστο ύψος βρίσκεται από την εξίσωση της ταχύτητας αν θέσουμε $v_\lambda = 0$. Τότε

$$v_\lambda = v_{0\lambda} - gt_{av} \Leftrightarrow 0 = 8 - 10 \cdot t_{av} \Leftrightarrow t_{av} = 0,8s$$

Η θέση του θα είναι τότε

$$\begin{aligned} \psi_{max,\lambda} &= \psi_{0\lambda} + v_{0\lambda}t_{av} + \frac{1}{2}(-g)t_{av}^2 \Leftrightarrow \psi_{max,\lambda} = 0 + 8t_{av} - 5t_{av}^2 \\ &\Leftrightarrow \psi_{max,\lambda} = 8 \cdot 0,8 - 5 \cdot 0,8^2 \Leftrightarrow \psi_{max,\lambda} = 3,2m \end{aligned}$$

Δηλαδή $H_{max,\lambda} = h + \psi_{max,\lambda} = 4,2m$ από το έδαφος.

δ) Τη χρονική στιγμή t_r που επιστρέφει βρίσκουμε από την εξίσωση της θέσης αν θέσουμε $\psi_\lambda = 0$, οπότε

$$\begin{aligned} \psi_\lambda &= \psi_{0\lambda} + v_{0\lambda}t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \Leftrightarrow 0 = 0 + 8t_r - 5t_r^2 \\ &\Leftrightarrow 5t_r^2 - 8t_r = 0 \Leftrightarrow t_r(5t_r - 8) = 0 \Leftrightarrow t_r = 0s \quad , \quad t_r = 1,6s \end{aligned}$$

Δεκτή είναι η χρονική στιγμή $t_r = 1,6s$.

Η ταχύτητα τότε θα είναι

$$v_\lambda = v_{0\lambda} - gt_r = 8 - 10 \cdot 1,6 = -8m/s, \text{ δηλαδή ίδιου μέτρου με την ταχύτητα εκτόξευσης αλλά αντίθετης φοράς.}$$

ε) Η πέτρα που εκτοξεύει ο χωρικός εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα κάτω. Θα μελετήσουμε την κίνηση ως προς τον ίδιο άξονα με το (α) ερώτημα, με θετική φορά προς τα πάνω.

Τη στιγμή της εκτόξευσης: $\psi_{0\chi} = +3m$, $v_{0\chi} = -v_0 = -8m/s$, $a_\chi = -g = -10m/s^2$.

Όταν φτάνει στο σημείο Β: $\psi_\chi = 0$.

$$\begin{aligned} \psi_\chi &= \psi_{0\chi} + v_{0\chi}t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \Leftrightarrow 0 = +3 - 8t - 5t^2 \\ &\Leftrightarrow 5t^2 + 8t - 3 = 0 \Leftrightarrow t_3 = -1,91s \quad , \quad t_4 = 0,31s \end{aligned}$$

Προφανώς έχουμε μία δεκτή λύση την $t_4 = 0,31s$, αφού η πέτρα αυτή δεν ξαναγυρίζει...

Η ταχύτητά της καθώς φτάνει στο σημείο Β θα είναι

$$v_{4\chi} = v_{0\chi} - gt_4 = -8 - 10 \cdot 0,31 = -11,1m/s$$

Το (-) εκφράζει ότι η πέτρα κινείται προς την αρνητική φορά του άξονα.

στ) Θα μελετήσουμε το πρόβλημα της συνάντησης, ως προς τον ίδιο άξονα $\psi\psi'$ του (α) ερωτήματος, με θετική φορά προς τα πάνω.

Γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης

$$\psi_{\lambda} = \psi_{0\lambda} + v_{0\lambda}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

$$\Leftrightarrow \psi_{\lambda} = 8t - 5t^2 \quad (1)$$

$$\psi_{\chi} = \psi_{0\chi} + v_{0\chi}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

$$\Leftrightarrow \psi_{\chi} = +3 - 8t - 5t^2 \quad (2)$$

Τη στιγμή της συνάντησης

$$\psi_{\lambda} = \psi_{\chi} \xrightarrow{(1)} 8t - 5t^2 = 3 - 8t - 5t^2$$

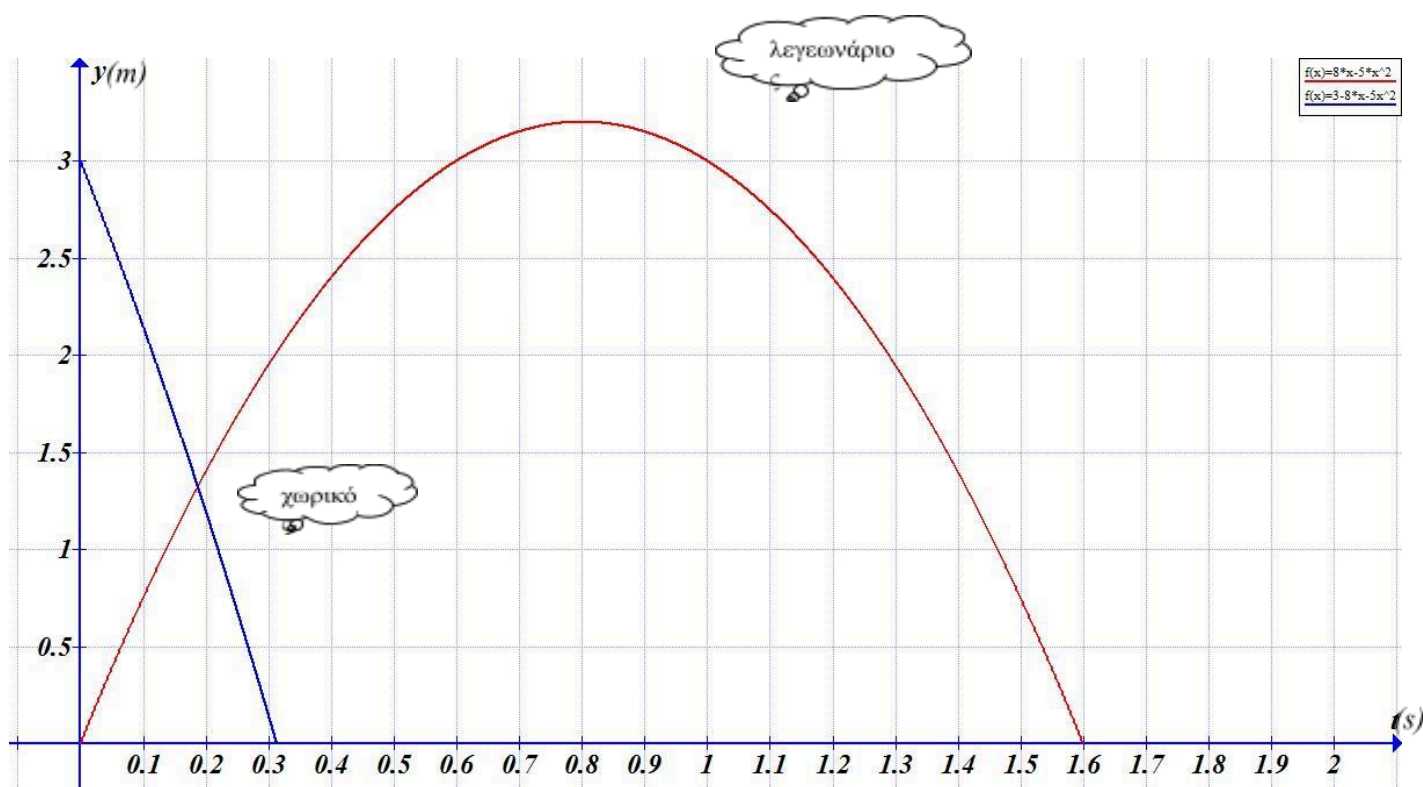
$$\Leftrightarrow 16t = 3 \Leftrightarrow t = \frac{3}{16}s \Leftrightarrow t \approx 0,1875s$$

Η θέση της συνάντησης από την (1) είναι

$$\psi_{\lambda} = 8t - 5t^2 = 8 \cdot 0,1875 - 5 \cdot 0,1875^2 = 1,32m$$

δηλαδή σε ύψος $h_I = 1,32 + 1 = 2,32m$, από το έδαφος.

ζ) Η γραφική παράσταση θέσης - χρόνου θα είναι



Α ν δ ρ έας Ρ ι ζ όπουλος

