XXIII районный конкурс творческих исследовательских работ школьников 5 - 11 классов

Исследовательская работа

Метод математической индукции как эффективный метод доказательства гипотез

Автор: Журавлева Ангелина,

учащаяся 10 класса

МКОУ СОШ №92

Руководитель: Гришкова Людмила Владимировна, учитель математики

г. Барабинск, 2020 г.

Оглавление

Введение

Одной из отличительных черт математики является дедуктивное построение теории. Но дедукция не является единственным методом научного мышления. Роль индуктивных выводов в экспериментальных науках очень велика. Они дают те положения, из которых потом путем дедукции делаются дальнейшие умозаключения.

Для исследования я выбрала тему « Метод математической индукции», так как в школьной программе метод математической индукции практически не затрагивается. В то время как подробное знакомство с этим методом полезно учащимся не только из-за расширения их кругозора, но также и потому, что на его принципе основано решение многих задач (включая олимпиадные). Изучение данной темы поможет мне в дальнейшем для решения заданий повышенной сложности, в том числе при решении олимпиадных заданий.

Объект исследования - метод математической индукции и её применение к решению задач повышенной сложности.

Предмет исследования - математические задачи.

Цель исследования - познакомиться с методом математической индукции, научиться применять данный метод и показать его практическое применение при решении математических задач.

Задачи исследования*:*

1. Выяснить историю происхождения метода математической индукции.
2. Рассмотреть различное применение метода математической индукции.
3. Провести опытно - экспериментальную работу.

Гипотеза - применение метода математической индукции поможет для решения олимпиадных заданий.

Новизна исследования состоит в том, что в работе рассматриваются сведения, которые не изучаются в школьном курсе.

Практическая значимость работы состоит в возможности использовании материала и результатов данного исследования на уроках математики, элективных занятиях, а также при подготовке к олимпиаде.

Методы исследования:

1. Сравнительный анализ литературы.

2. Систематизация и сбор информации.

3. Обобщение результатов исследования.

Глава 1. Истории возникновения метода математической индукции.

В математике уже издавна используется индуктивный метод, основанный на том, что то или иное общее утверждение делается на основании рассмотрения лишь нескольких частных случаев.

Правила логических рассуждений были сформулированы два с половиной тысячелетия назад древнегреческим учёным Аристотелем. Он создал полный список простейших правильных рассуждений, *силлогизмов* – «кирпичиков» логики, одновременно указав типичные рассуждения, очень похожие на правильные, однако неправильные.

Осознание метода математической индукции как отдельного важного метода восходит к Блезу Паскалю и Герсониду, хотя отдельные случаи применения встречаются ещё в античные времена у Прокла и Эвклида. Современное название метода было введено де Морганом в 1838 году.

Только к концу XIX века сложился стандарт требований к логической строгости, остающейся и до настоящего времени господствующими в практической работе математиков над развитием отдельных математических теорий.

Индукция наглядно иллюстрируется известной легендой о том, как Исаак Ньютон сформулировал закон всемирного тяготения после того, как ему на голову упало яблоко. Ещё пример из физики: в таком явлении, как электромагнитная индукция, электрическое поле создает, «наводит» магнитное поле. «Ньютоново яблоко» – типичный пример ситуации, когда один или несколько частных случаев, то есть *наблюдения*, «наводят» на общее утверждение, общий вывод делается на основании частных случаев. Индуктивный метод является основным для получения общих закономерностей и в естественных, и в гуманитарных науках. Но он имеет весьма существенный недостаток: на основании частных примеров может быть сделан неверный вывод. Гипотезы, возникающие при частных наблюдениях, не всегда являются правильными.

Глава 2. Основные результаты исследования.

2.1. Общие и частные утверждения.

В процессе работы я выяснила, что все утверждения можно разделить на общие и частные. Примером общего утверждения является, например, утверждение: «В любом прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов». Частным является, например, утверждение: «Число 504 делится на 8».

2.2. Дедукция.

Переход от общих утверждений к частным называется ***дедукцией.*** В математике дедуктивный метод мы применяем, например, в рассуждениях такого типа: данная фигура - прямоугольник; у каждого прямоугольника противоположные стороны равны, следовательно, и у данного прямоугольника диагонали равны.

2.3. Индукция.

Наряду с этим математике часто приходится от частных утверждений переходить к общим, т.е. использовать метод, противоположный дедуктивному, который называется ***индукцией***.

Индуктивный подход обычно начинается с анализа и сравнения, данных наблюдения или эксперимента. Многократность повторения какого-либо факта приводит к индуктивному обобщению. Результат, полученный индукцией, вообще говоря, не является логически обоснованным, доказанным. Известно много случаев, когда утверждения, полученные индукцией, были неверными. То есть индукция может привести как к верным, так и к неверным выводам.

2.4. Неполная индукция

Рассмотрим **пример**. Подставляя в квадратный трехчлен $P(x)= x^2+ x+ 41$ вместо x натуральные числа 1,2,3,4,5, найдем: $P(1)= 43$; $P(2)=47$; $P(3)= 53$; $P(4)= 61$; $P(5)= 71$. Все значения данного трехчлена являются простыми числами. Подставляя вместо x числа 0, -1, -2, -3, -4, получим: $P(0)=41$;
$P(-1)=41$; $P(-2)=43$; $P(-3)=47$; $P(-4) =53$. Значения данного трехчлена при указанных значениях переменной x также являются простыми числами.

Возникает гипотеза, что значение трехчлена $P(x)$ является простым числом при любом целом значении x. Но высказанная **гипотеза ошибочна**, так как, например, $P(41)= 41^2+41+41=41\cdot 43$.

Так как при этом методе вывод делается после разбора нескольких примеров, не охватывающих всех возможных случаев, то этот метод называется ***неполной или несовершенной индукцией.***

Метод неполной индукции, как мы видим, не приводит к вполне надежным выводам, но он полезен тем, что **позволяет сформулировать гипотезу**, которую потом можно доказать точным математическим рассуждением или опровергнуть. Иными словами, неполная индукция в математике не считается законным методом строгого доказательства, но является **мощным эвристическим методом открытия новых истин**.

2.5. Полная индукция.

Если же вывод делается на основании разбора всех случаев, то такой метод рассуждений называют ***полной индукцией.***

Вот **пример** подобного рассуждения. Пусть требуется установить, что каждое натуральное чётное число n в пределах $10< n < 20$ представимо в виде суммы двух простых чисел. Для этого возьмём все такие числа и выпишем соответствующие разложения: $10=7+3$; $12=7+5$; $14=7+7$; $16=11+5$; $18=13+5$; $20=13+7$. Эти шесть равенств показывают, что каждое из интересующих нас чисел действительно представляется в виде суммы двух простых слагаемых.

2.6. Метод математической индукции.

Пусть некоторое утверждение справедливо в нескольких частных случаях. Рассмотрение всех остальных случаев или совсем невозможно, или требует большого числа вычислений. Как же узнать, справедливо ли это утверждение вообще? Этот вопрос иногда удается решить посредством применения особого метода рассуждений, называемого ***методом математической индукции***. В основе данного ***метода*** лежит ***принцип математической индукции*.**

Если предположение, зависящее от натурального числа n, истинно для n=1 и из того, что оно истинно для n=k (где k-любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего числа n=k+1, то предположение истинно для любого натурального числа n.

Метод математической индукции - есть эффективный метод доказательства гипотез (утверждений), основанный на использовании принципа математической индукции, поэтому он приводит только к верным выводам.

Методом математической индукции **можно решать не все задачи**, а только задачи, **параметризованные** некоторой переменной. Эта переменная называется переменной индукции.

2.7. Применение метода математической индукции

Метод математической индукции имеет наибольшее применение в арифметике, алгебре и теории чисел.

Пример 1. Найти сумму $Sn = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$

Сначала найдем суммы одного, двух и трех слагаемых. Имеем:

$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$; $S_2 = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$; $S_3 = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$.

В каждом из этих случаев получается дробь, в числителе которой стоит число слагаемых, а в знаменателе — число, на единицу большее числа слагаемых. Это позволяет высказывать **гипотезу (** предположение), что при любом натуральном n: $Sn = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n+1}}$.

Для проверки этой гипотезы воспользуемся методом математической индукции.

1. При $\boldsymbol{n} = 1$ гипотеза верна, так как $S_1 = \frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$.
2. Предположим, что гипотеза верна при $n = \mathrm{k}$, то есть

$$\mathrm{S_k} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1} .$$

Докажем, что тогда гипотеза должна быть верной и при $n = k+1$, то есть

$$S_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2} .$$

Действительно, $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$S_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} -$$

Таким образом, исходя из предположения, что гипотеза $S_n = \frac{n}{n+1}$ верна при $n = k$, мы доказали, что она верна и при $n = k + 1$.

Поэтому формула $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ верна при любом натуральном n.

Пример 2. Доказать, что для любого натурального числа n и любого действительного числа $a > -1$ имеет место неравенство, называемое ***неравенством Бернулли*** (названо в честь швейцарского математика XVII в. Якова Бернулли)***:***

$(1+a)^n \geq 1 + an.$

1. Если $n=1$, то очевидно, что неравенство верно: $(1+a)^1 \geq 1+a.$

2. Предположим, что неравенство верно при $n=k$: $(1+a)^k \geq 1 + ak.$

Умножим обе части последнего неравенства на положительное число $1+a$, в результате чего получим $(1+a)^{k+1} \geq 1+ak+a+a^2k.$

Отбрасывая последнее слагаемое в правой части неравенства, мы уменьшаем правую часть этого неравенства, а поэтому $(1+a)^{k+1} \geq a(k+1).$

Полученный результат показывает, что неравенство верно и при $n=k+1$.

Обе части доказательства методом математической индукции проведены, и, следовательно, неравенство справедливо при любом натуральном n.

2.8. Второй вариант метода математической индукции

Некоторые утверждения справедливы не для всех натуральных *n,* а лишь для натуральных *n,* начиная с некоторого числа *p.* Такие утверждения иногда удается доказать методом, несколько отличным от того, который описан выше, но вполне аналогичным ему. Состоит он в следующем. **Утверждение верно при всех натуральных значениях n ≥ p, если:**

1. оно верно при *n* =p (а не при *n* = 1, как было сказано выше);
2. из справедливости этого утверждения при *n* = k, где k ≥ p (а не k ≥1, как сказано выше), вытекает, что оно верно и при *n* = k + 1.

Пример 1. Докажите, что для любого $n>1$ справедливо равенство

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{n^2})=\frac{n+1}{2n}$$

Обозначим произведение в левой части равенства через P_n, т.е.

мы должны доказать, что $P_n=\frac{n+1}{2n}$.

Для n=1 формула не верна (1- 1) = 1(неверно).

1) Проверим, что эта формула верна для n = 2. $1-\frac{1}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}$, $\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$ - верно.

2) Пусть формула верна для n = k, т.е. $P_k=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{k^2})=\frac{k+1}{2k}$

3) Докажем, что это тождество верно и для n = k + 1, т.е.

$$P_{k+1}=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{(k+1)^2})=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

$$P_{k+1}=P_k\cdot(1-\frac{1}{(k+1)^2})=\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}=\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{k\cdot(k+2)}{(k+1)^2}=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

По принципу математической индукции равенство справедливо для любого натурального $n > 1$.

Пример 2. Докажите, что $2^n > 2n + 1$ при любом натуральном $n \geq 3$.

1) При $n = 3$ неравенство верно. $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$.

2) Предположим, что $2^k > 2k + 1$ $(k \geq 3)$.

3) Докажем, что $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$.

В самом деле, $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k + 1) = (2k + 3)(2k - 1) > 2k + 3$, так как $2k - 1 > 0$ при любом натуральном значении k. Следовательно, $2^n > 2n + 1$ при всех $n \geq 3$.

2.9 Замечание к методу математической индукции

Доказательство методом математической индукции состоит из двух этапов.

l-й этап. Проверяем, верно ли утверждение при $n = 1$ (или при $n = p$, если речь идет о методе, описанном выше).

2-й э т а п. Допускаем, что утверждение верно при $n = k$, и, исходя из этого, доказываем, что оно верно и при $n = k+1$.

Каждый из этих этапов по-своему важен, рассматривая пример $P(x)= x^2+ x+41$, мы убедились, что утверждение может быть верным в целом ряде частных случаев, но неверным вообще. Этот пример убеждает нас в том, насколько важен 2-й этап доказательства методом математической индукции. Опустив его, можно прийти к неверному выводу.

Не следует, однако, думать, что 1-й этап менее важен, чем 2-й. Сейчас я приведу пример, показывающий, к какому нелепому выводу можно прийти, если опустить 1-й этап доказательства.

Теорем а. ***При любом натуральном n число 2n +1 четное.***

Доказательство. Пусть эта теорема верна при $n = k$, то есть число $2k + 1$ четное. Докажем, что тогда число $2(k+1)+1$ также четно.

Действительно, $2(k+1)+1 = (2k+1)+2$.

По предположению число $2k +1$ четно, а поэтому его сумма с четным числом 2 также четна. Теорема «доказана».

Если бы мы не забыли проверить, верна ли наша «теорема» при $n = 1$, мы не пришли бы к такому «результату».

Глава 3. Задачи на использование метода математической индукции.

3.1. Применения метода математической индукции к доказательству неравенств.

Пример 1. Доказать, что при любом натуральном n>1

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

Решение.

Обозначим левую часть неравенства через S_n.

$S_2=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}$, следовательно, при n=2 неравенство справедливо.

Пусть $S_k>\frac{13}{24}$ при некотором k. Докажем, что тогда и $S_{k+1}>\frac{13}{24}$. Имеем $S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}$, $S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+..+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$.

Сравнивая S_k и S_{k+1}, имеем $S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$, т.е. $S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$.

При любом натуральном k правая часть последнего равенства положительна. Поэтому $S_{k+1}>S_k$. Но $S_k>\frac{13}{24}$, значит, и $S_{k+1}>\frac{13}{24}$.

Пример 2. Доказать, что $(1+\alpha)^n>1+n\alpha$, где α >-1, $\alpha\neq 0$, n – натуральное число, большее 1.

Решение.

При n=2 неравенство справедливо, так как $\alpha^2 > 0$.

Пусть неравенство справедливо при n=k, где k – некоторое натуральное число, т.е.

$$(1+\alpha)^k > 1 + k\alpha. \quad (1)$$

Покажем, что тогда неравенство справедливо и при n=k+1, т.е.

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1 + (k+1)\alpha. \quad (2)$$

Действительно, по условию, $1+\alpha > 0$, поэтому справедливо неравенство

$$(1+\alpha)^{k+1} > (1+k\alpha)(1+\alpha), \quad (3)$$

полученное из неравенства (1) умножением каждой части его на $1+\alpha$. Перепишем неравенство (3) так: $(1+\alpha)^{k+1} > 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2$. Отбросив в правой части последнего неравенства положительное слагаемое $k\alpha^2$, получим справедливое неравенство (2).

<u>Пример 3:</u>

Доказать неравенство

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n},$$

Где x_1, x_2,…., x_3 – произвольные положительные числа.

Это важное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим n чисел является простым следствием соотношения, доказанного в предыдущем примере. В самом деле, пусть x_1, x_2, ..., x_n — произвольные положительные числа. Рассмотрим n чисел

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 .... x_n}}, \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}}, ..., \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}}.$$

Очевидно, что все эти числа положительны и произведение их равно единице. Следовательно, по доказанному в предыдущем примере их сумма больше или равна n, т.е.

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}, \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}. \geq n$$

Отсюда

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n},$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим n чисел часто оказывается полезным при доказательстве других неравенств, при отыскании наименьших и наибольших значений функций.

3.2. Применение метода математической индукции к суммированию рядов

Пример 4. Доказать формулу

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$$, n – натуральное число.

Решение.

При n=1 обе части равенства обращаются в единицу и, следовательно, первое условие принципа математической индукции выполнено.

Предположим, что формула верна при n=k, т.е.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства $(k+1)^3$ и преобразуем правую часть. Тогда получим

$$1^3+2^3+...+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=(k+1)^2\cdot\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=$$
$$=\left(\frac{k+1}{2}\right)^2(k^2+4k+4)=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

Таким образом, из того, что формула верна при n=k, следует, что она верна и при n=k+1. Это утверждение справедливо при любом натуральном значении k. Итак, второе условие принципа математической индукции тоже выполнено. Формула доказана.

Пример 5. Доказать, что сумма квадратов n первых чисел натурального ряда равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Решение.

Пусть $S_2(n)=1^2+2^2+...+n^2$.

$$S_2(1)=1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}.$$

Предположим, что $S_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Тогда

$$S_2(n+1)=1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

и окончательно

$$S_2(n+1)=\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Пример 6. Доказать, что $1\cdot 2+2\cdot 3+...+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

Решение.

$1\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$.

Если $1\cdot 2+2\cdot 3+...+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$, то

$$1\cdot 2+2\cdot 3+...+(n-1)n+n(n+1)=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Пример 7.

Найдите сумму $\frac{1}{1*4}+\frac{1}{4*7}+\frac{1}{7*10}+.....+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

S(1)= $\frac{1}{4}$, S(2)= $\frac{2}{7}$, S(3)=S(2)+ $\frac{1}{7*10}=\frac{3}{10}$. Можно предположить, что S(n)= $\frac{n}{3n+1}$.

Докажем это. Для n=1 формула верна. Предположим, что она будет верна и для n=k+1:

S(k+1)=S(k)+

$$\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}=$$
$$\frac{(k+1)(3k+1)}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}=\frac{k+1}{3(k+1)+1}.$$

3.3. Доказательство тождеств может это вставить в олимпиадные задания?

Пример 8. Доказать, что при любом натуральном **n** справедливо равенство

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

1) Проверим, что это тождество верно при n = 1.

$$1=\frac{1(1+1)}{2}$$

$1=1$ - верно.

2) Пусть тождество верно и для n = k, т.е.

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

3)Докажем, что это тождество верно и для n = k + 1, т.е.

$$1+2+3+...+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Что и требовалось доказать.

Пример 9. Докажите тождество

$2\cdot 2^{1}+3\cdot 2^{2}+4\cdot 2^{3}+\ldots+n\cdot 2^{n-1}=(n-1)\cdot 2^{n}$

1) Проверим, что это тождество верно при n = 2.

$2\cdot 2^{1}=(2-1)\cdot 2^{2}$

4 = 4 – верно

2) Пусть тождество верно для n = k, т.е.

$2\cdot 2^{1}+3\cdot 2^{2}+4\cdot 2^{3}+\ldots+k\cdot 2^{k-1}=(k-1)\cdot 2^{k}$

3) Докажем, что это тождество верно и для n = k + 1, т.е.

$2\cdot 2^{1}+3\cdot 2^{2}+4\cdot 2^{3}+\ldots+k\cdot 2^{k-1}+(k+1)\cdot 2^{k}=k\cdot 2^{k+1}$

$2 \cdot 2^{1} + 3 \cdot 2^{2} + 4 \cdot 2^{3} + \ldots + k \cdot 2^{k-1} + (k + 1) \cdot 2^{k} = (k - 1) \cdot 2^{k} + (k + 1) \cdot 2^{k} =$

$= (k - 1 + k + 1) \cdot 2^{k} = 2k \cdot 2 = k \cdot 2^{k+1}$

Пример 10. Докажите тождество

$$\frac{2^3+1}{2^3-1} \cdot \frac{3^3+1}{3^3-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n^3+1}{n^3-1} = \frac{3n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$$

При n ≥ 2

1) Проверим, что это тождество верно для n = 2

$$\frac{2^3+1}{2^3-1} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{2(2^2+2+1)}$$

$$\frac{9}{7} = \frac{9}{7}$$ - верно

2) Пусть формула верна для n = k, т.е.

$$\frac{2^3+1}{2^3-1} \cdot \frac{3^3+1}{3^3-1} \cdot \ldots \cdot \frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{3k(k+1)}{2(k^2+k+1)}$$

3) Докажем, что эта формула верна и для n = k + 1, т.е.

$$\frac{2^3+1}{2^3-1} \cdot \frac{3^3+1}{3^3-1} \cdot \ldots \cdot \frac{(k+1)^3+1}{(k+1)^3-1} = \frac{3k(k+1)}{2(k^2+k+1)} \cdot \frac{(k+2)((k+1)^2-(k+1)+1)}{k((k+1)^2+(k+1)+1)} =$$

$$\frac{3k(k+1)(k+2)(k^2+2k+1-k-1+1)}{2(k^2+k+1) \cdot k(k^2+2k+1+k+1+1)} = \frac{3(k+1)(k+2)(k^2+k+1)}{2(k^2+k+1)(k^2+3k+3)} = \frac{3(k+1)(k+2)}{2(k^2+3k+3)}$$

Пример 11. Докажите, что для любого $n > 1$ справедливо равенство

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{n^2})=\frac{n+1}{2n}$$

Обозначим произведение в левой части равенства через P_n, т.е.

Мы должны доказать, что $P_n = \frac{n+1}{2n}$.

1) Проверим, что эта формула верна для n = 2.

$$1-\frac{1}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}$$

$\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$ -верно.

2) Пусть формула верна для n = k, т.е.

$$P_k=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{k^2})=\frac{k+1}{2k}$$

3) Докажем, что это тождество верно и для n = k + 1, т.е.

$$P_{k+1}=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{(k+1)^2})=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

Заметим, что $P_{k+1}=P_k\cdot(1-\frac{1}{(k+1)^2})$.

Имеем $P_{k+1}=P_k\cdot(1-\frac{1}{(k+1)^2})=\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}=\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{k\cdot(k+2)}{(k+1)^2}=\frac{k+2}{2(k+1)}$

По принципу математической индукции равенство справедливо для любого натурального $n>1$.

3.4. Метод математической индукции в решении задач на геометрическую прогрессию

Пример 12. Докажем, что общий член геометрической прогрессии равен

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, методом математической индукции.

1) Проверим, что данное утверждение верно при $n=1$:

$a_1 = a_1 \cdot q^0$

$a_1 = a_1 \cdot 1$

$a_1 = a_1$

левая часть = правой части.

2) Предположим, что данное утверждение верно, при $n=k$:

$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$

3) И, докажем, что данное утверждение верно при $n = k+1$:

$a_{k+1} = a_1 \cdot q^k$

Доказательство:

$a_{k+1} = a_k \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = a_1 \cdot q^k$,

что и требовалось доказать.

Оба условия принципа математической индукции выполняются и поэтому формула $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ верна для любого натурального числа n.

Пример 13. Методом математической индукции доказать, что сумма n - членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле:

$$Sn = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} \quad (q \neq 1).$$

1) Проверим, что данное утверждение верно при $n=1$:

Левая часть: $S_1 = b_1$

Правая часть: $\frac{b_1(q-1)}{(q-1)} = b_1$

$b_1 = b_1.$

2) Предположим, что данное утверждение верно, при $n=k$:

$$S_k = \frac{b_1(q^k - 1)}{(q-1)}$$

3) И, докажем, что данное утверждение верно при *n=k+1:*

$$S_{k+1} = \frac{b_1(q^{k+1} - 1)}{(q-1)}.$$

Доказательство:

$S_{k+1} = S_k + (k+1)$ член =

$$= \frac{b_1(q^k - 1)}{(q-1)} + b_1 q^k = \frac{(b_1 q^k - b_1)}{(q-1)} + b_1 q^k = \frac{b_1 q^k - b_1 + b_1 q^{k+1} - b_1 q^k}{(q-1)} = \frac{b_1(q^{k+1} - 1)}{(q-1)}.$$

Оба условия принципа математической индукции выполняются, поэтому формула $Sn = \frac{b_1(q^k - 1)}{(q-1)}$ верна для любого натурального *n*.

3.5. Решение олимпиадных заданий

Проанализировав, тексты Всероссийской олимпиады по математике за последние 5 лет, я встретила несколько заданий, которые можно решить, применив метод математической индукции. Вот одна из них.

Пример 13. Выпуклый многоугольник будем называть «красивым», если выполняются следующие условия:

1) каждая его вершина окрашена в один из трёх цветов;
2) любые две соседние вершины окрашены в разные цвета;
3) в каждый из трёх цветов окрашена, по крайней мере, одна вершина многоугольника.

Доказать, что любой красивый n-угольник можно разрезать не пересекающимися диагоналями на «красивые» треугольники.

Решение

Воспользуемся методом математической индукции.

База индукции. При наименьшем из возможных n=3 утверждение задачи очевидно: вершины «красивого» треугольника окрашены в три разных цвета и никакие разрезы не нужны.

Предположение индукции. Допустим, что утверждение задачи верно для любого «красивого» n-угольника.

Индукционный шаг. Рассмотрим произвольный «красивый» (n+1)-угольник и докажем, используя предположение индукции, что его можно разрезать некоторыми диагоналями на «красивые» треугольники. Обозначим через A_1, A_2, A_3, … A_n, A_{n+1} – последовательные вершины (n+1)-угольника. Если в какой-либо из трёх цветов окрашена лишь одна вершина (n+1)-угольника, то, соединив эту вершину диагоналями со всеми не соседними с ней вершинами, получим необходимое разбиение (n+1)-угольника на «красивые» треугольники.

Если в каждый из трёх цветов окрашены не менее двух вершин (n+1)-угольника, то обозначим цифрой 1 цвет вершины A_1, а цифрой 2 цвет вершины A_2. Пусть k – такой наименьший номер, что вершина A_kокрашена в третий цвет. Понятно, что $k > 2$. Отсечём от (n+1)-угольника диагональю $A_{k-2}A_k$ треугольник $A_{k-2}\,A_{k-1}A_k$. В соответствии с выбором числа k все вершины этого треугольника окрашены в три разных цвета, то есть этот треугольник «красивый». Выпуклый n-угольник $A_1A_2 \ldots A_{k-2}A_kA_{k+1} \ldots A_{n+1}$, который остался, также, в силу индуктивного предположения, будет «красивым», а значит разбивается на «красивые» треугольники, что и требовалось доказать.

Заключение

Итак, индукция — одна из форм умозаключения, приём исследования, применяя который от знания отдельных фактов приходят к общим положениям. Индукция бывает полная и неполная. Метод неполной индукции состоит в переходе к универсальной формулировке после проверки истинности частных формулировок для отдельных, но не всех значений n. Применяя полную индукцию, мы лишь тогда считаем себя вправе объявить об истинности универсальной формулировки, когда убедились в её истинности для каждого без исключения значения n. Метод математической индукции – метод доказательства, основанный на принципе математической индукции. Он позволяет в поисках общего закона испытывать гипотезы, отбрасывать ложные и утверждать истинные.

Метод математической индукции является одной из теоретических основ при решении задач на суммирование, доказательстве тождеств, доказательстве и решении неравенств, решении при изучении свойств числовых последовательностей и т. д.

Знакомясь с методом математической индукции, я изучала специальную литературу, консультировалась с педагогом, анализировал данные и решения задач, пользовался ресурсами Интернета, выполнял необходимые вычисления.

Вывод:

В ходе работы я узнала, чтобы решать задачи методом математической индукции нужно знать и понимать основной принцип математической индукции.

Достоинством метода математической индукции является его универсальность, так как с помощью этого метода можно решить многие задачи. Недостатком неполной индукции является то, что порой она приводит к ошибочным выводам.

Систематизировав знания по математической индукции, я убедилась в необходимости знаний по теме «метод математической индукции». Кроме того эти знания повышают интерес к математике, как к науке.

Так же в ходе работы приобрела навыки решения задач по использованию метода математической индукции. Считаю, что эти навыки помогут мне при подготовке к олимпиаде по математике в следующем учебном году.

Список литературы.

1. Боковнев О. А., Фирсов В. В., Шварцбурд С. И. Избранные вопросы математики. 9 класс. Факультативный курс.-М.: Просвещение, 1979г.
2. Виленкин Н. Я., Шибасов Л. П., Шибасова З. Ф. За страницами учебника математики. Москва: Просвещение, 1996г.
3. Галицкий М. Л., Мошкович М. М., Шварцбурд С. И. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа: методические рекомендации, дидактические материалы.
4. Ивлев Б.М., Абрамов А.М., Дудницин Ю.П., Шварцбурд С.И. М.: Просвещение, 1990г.

5. Коровин П. П. Неравенства. Популярные лекции по математике, выпуск 5-М.: Наука, 1983г.
6. Соминский И.С. Метод математической индукции. Популярные лекции по математике, выпуск 3-М.: Наука, 1974г.
7. Петраков И. С. Математические кружки в 8-10 классах: Кн. для учителя М.: Просвещение, 1987г.
8. Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач учебное пособие для 10 класса средней школы – М.: Просвещение,1989г.