

Avertissement:

- 1) les graphes étant tous semblables (des exponentielles croissantes), il n'en a été tracé que l'allure;
- 2) dans la question 3.3.3-, mes applications numériques me conduisent toujours à un régime oscillant, qui n'est pas dans la logique de l'énoncé; j'ai donc renoncé au tracé demandé.

ENS Cachan B(A) 1995

Première partie: Étude électromagnétique

1.1- Spire équivalente:

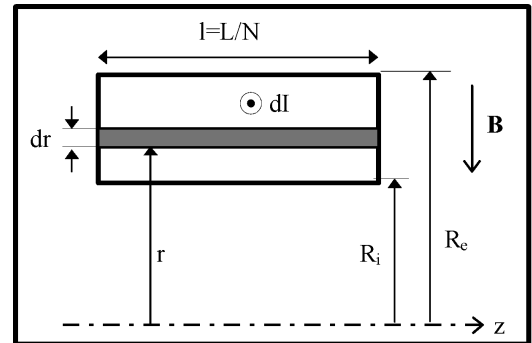
1.1.1- La force de **Laplace** a pour expression: $d\vec{f} = dI \{ \vec{u} \wedge \vec{B}$

1.1.2- On considère une spire élémentaire de section ldr , de longueur $2\pi r$, parcourue par le courant d'intensité $dI = dldr$, où $d = I/[l(R_e - R_i)]$; elle est soumise à la force:

$$\vec{f} = \int dldr 2\pi r B \{ \vec{e}_z = d \frac{L}{N} p B (R_e - R_i) \vec{e}_z$$

1.1.3- On constate en effet que l'on peut écrire:

$$\vec{f} = IB 2\pi R \vec{e}_z$$



1.2- Force électromagnétique résultante:

1.2.1- Le résultat est immédiat: $\vec{F} = N\vec{f} = NIB 2\pi R \vec{e}_z$

1.2.2- On peut écrire F sous la forme indiquée en posant: $k_f = B 2\pi R$

C'est homogène à une circulation du champ magnétique B, mais cela ne correspond pas à une circulation concrète.

1.2.3- **AN:** $I_e = dL(R_e - R_i) = 800A$; $F = 78,4N$

1.3- Force contre électromotrice:

1.3.1- On sait que le champ électromoteur est: $\vec{E}_M = \vec{v} \wedge \vec{B} = Bv \{ \vec{u} \wedge \vec{e}_z$ et la fem: $e = \int \vec{E}_M \cdot d\vec{M} = Bvu$

1.3.2- Il est clair que: $e = Bv 2\pi R \Rightarrow k^{\circ f} = B 2\pi R = k_f$ **AN:** $e_0 = 9,80 \cdot 10^{-2}V$

1.3.3- Le résultat est immédiat: $E = Ne$

1.4- Calcul de la résistance:

1.4.1- La résistance se calcule par la formule:

$$R = \rho \frac{L}{S} \Rightarrow R_b = \rho \frac{2\pi R N^2}{L(R_e - R_i)} \Rightarrow r_b = \rho \frac{2\pi R}{L(R_e - R_i)}$$

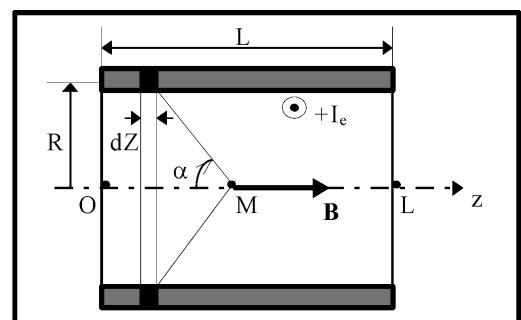
1.4.2- **AN:** $r_b = 1,23 \cdot 10^{-4} \Omega$

1.5- Calcul de l'inductance:

1.5.1.a- Tout plan contenant l'axe Oz est plan d'antisymétrie pour la distribution de courants; il s'ensuit que le champ magnétique $\vec{B}$ est dirigé selon l'axe Oz, la « règle du tire-bouchon » donnant alors le sens du vecteur. À partir de la loi de **Biot & Savart**, on retrouve le résultat:

$$dB = \frac{\mu_0}{2R} \frac{I_e dZ}{L} \sin^3(\alpha)$$

où Z est la position de la spire (z étant celle du point M).



1.5.1.b- Dans un premier temps, on a intérêt à intégrer selon la variable α :

$$\cot(\alpha) = \frac{z-Z}{R} \Rightarrow dZ = \frac{R d\alpha}{\sin^2(\alpha)} \Rightarrow dB = \frac{m_0 I_e}{2L} \sin(\alpha) d\alpha \Rightarrow B = \frac{m_0 I_e}{2L} [\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)]$$

On en déduit: $\vec{B}(z) = \frac{m_0 I_e}{2L} \left[\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{L-z}{\sqrt{R^2+(L-z)^2}} \right] \vec{e}_z$

1.5.1.c- On calcule la valeur du rapport demandé et l'on constate que B varie relativement peu sur l'axe, à l'intérieur de la spire.

$$B(0) = \frac{m_0 I_e}{2\sqrt{R^2+L^2}}; B(L/2) = \frac{m_0 I_e}{\sqrt{4R^2+L^2}} \Rightarrow \frac{B(0)}{B(L/2)} = \frac{\sqrt{4R^2+L^2}}{2\sqrt{R^2+L^2}} = 0,785$$

1.5.2- Compte tenu des hypothèses simplificatrices, le calcul est aisé:

$$W_{mag} = \iiint \frac{B^2}{2m_0} dt = \frac{B^2}{2m_0} p R^2 L \Rightarrow W_{mag} = \frac{pm_0 R^2 L I_e^2}{2(4R^2+L^2)}$$

1.5.3- De la relation: $W_{mag} = \frac{1}{2} L I^2$, on tire:

$$L = \frac{pm_0 R^2 L}{4R^2+L^2} N^2 \quad P = \frac{pm_0 R^2 L}{4R^2+L^2} = 1,56 \cdot 10^{-8} H$$

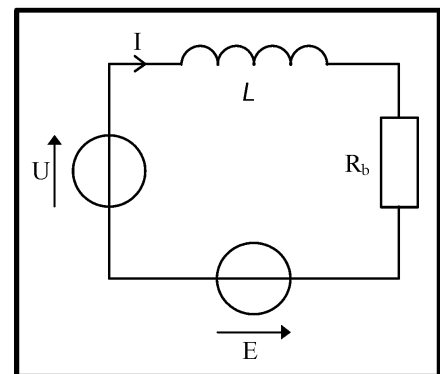
1.6- Équation différentielle:

1.6.1- On a affaire à un circuit série comportant un générateur de fem U, une force électromotrice E, une inductance propre L et une résistance R_b. L'équation différentielle du circuit est:

$$U = E + L \frac{dI}{dt} + R_b I$$

1.6.2- En remplaçant les grandeurs par leurs expressions:

$$U = N \left(k_f v + P \frac{dI_e}{dt} + r_b I_e \right)$$



1.7- Détermination du nombre de spires:

1.7.1- Des deux équations: $U_0 = N_0(k_f V_0 + r_b I_e)$ et $F = k_f I_e$, on déduit: $N_0 = \frac{U_0}{k_f V_0 + r_b F/k_f}$

1.7.2- N₀ permet d'ajuster la valeur de $k_f V_0 + r_b F/k_f$.

1.7.3- AN: $N_0 = 61 \text{ spires}$ $R_b = 0,456 \Omega$ $L = 58,2 \text{ mH}$ $E_0 = 5,98 \text{ V}$

1.8- Échelon de tension:

1.8.1- cas a: solénoïde immobilisé; pour $t = 0$, la forme de l'équation différentielle imposant la continuité de l'intensité, elle s'intègre en:

$$L \frac{di}{dt} + R_b i = U_0 \Rightarrow i_a(t) = \frac{U_0}{R_b} \left[1 - \exp\left(-\frac{R_b}{L} t\right) \right]$$

1.8.1- cas b: solénoïde à vitesse uniforme; il suffit de changer U_0 en $U_0 - E_0$, soit:

$$L \frac{di}{dt} + R_b i = U_0 - E_0 \Rightarrow i_b(t) = \frac{U_0 - E_0}{R_b} \left[1 - \exp\left(-\frac{R_b}{L} t\right) \right]$$

AN: $i_a(t)_{[A]} = 27,2 \exp(-7,84 \cdot 10^3 t)$

$$i_b(t)_{[A]} = 13,9 \exp(-7,84 \cdot 10^3 t)$$

Les exponentielles appartenant à la catégorie des « fonctions bien connues », seule l'allure des courbes a été tracée.

1.8.2- La constante de temps ne dépend pas du nombre de spires car elle vaut:

$$t_e = \frac{L}{R_b} = \frac{m_0 L^2 (R_e - R_b) R}{2\rho (4R^2 + L^2)} = 128 \text{ ms}$$



Deuxième partie: Étude thermique

2.1- Pertes Joule:

La puissance dissipée par effet Joule est égale à:

$$P_J = R_b I^2 = \rho \frac{2pRN^2}{L(R_e - R_i)} \left[d \frac{L}{N} (R_e - R_i) \right]^2 \Rightarrow P_J = \rho p d^2 L (R_e - R_i) = 78,4W$$

La densité volumique de puissance peut s'écrire directement, sans passer par P_J :

$$p_J = \rho d^2 = 32,0MW/m^3$$

2.2- Schéma équivalent:

2.2.1- Le schéma équivalent correspond à l'équation: $P_J = C_{th} \frac{d(Dq)}{dt} + \frac{Dq}{R_{th}}$.

La capacité *thermique* (et non calorifique) du solénoïde vaut: $C_{th} = cvp(R_e - R_i)$

Pour obtenir la résistance thermique d'échange, on exprime cet échange de deux façons:

$$\frac{Dq}{R_{th}} = \alpha 2pR_i LDq + \alpha 2pR_e LDq \Rightarrow R_{th} = \frac{1}{\alpha 2pL(R_i + R_e)}$$

2.2.2- AN: $C_{th} = 425J.K^{-1}$ $R_{th} = 17,0K.W^{-1}$

2.2.3- Les échanges de chaleur se font par conduction, convection et rayonnement.

2.3- Évolution de la température du solénoïde:

2.3.1- L'équation différentielle du 2.2.1- s'intègre comme celle du 1.8.1-:

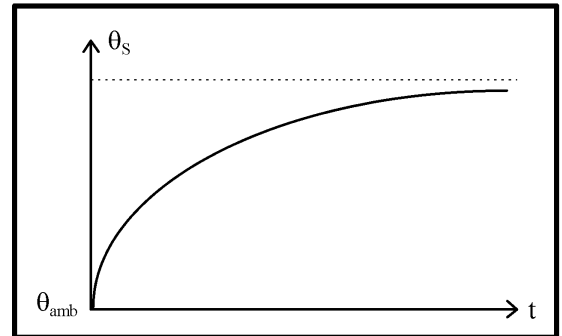
$$q_s = q_{amb} + P_J R_{th} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{R_{th} C_{th}}\right) \right]$$

$$q = 20 + 1333 \left[1 - \exp\left(-1,384 \cdot 10^{-4} t\right) \right]$$

À nouveau, seule l'allure du graphe est donnée.

2.3.2- La constante de temps vaut:

$$t_{th} = R_{th} C_{th} = 7,23ks$$



2.3.3- Le calcul de la densité de courant est immédiat: $P_J R_{th} = 100K \Rightarrow d_p = 11,0A.mm^{-2}$

2.3.4- La durée maximale est: $t_{max} = -t_{th} \ln\left(1 - \frac{q_{smax} - q_{amb}}{P_J R_{th}}\right) = 564s$

2.3.5.a- Physiquement, cela veut dire que la chaleur produite est restée dans la spire et n'a pas encore commencé à être évacuée vers l'extérieur; l'équation du 2.2.1- se résume à:

$$P_J \gg C_{th} \frac{d(Dq)}{dt} \Rightarrow Dq(t) \gg \frac{P_J}{C_{th}} t = \frac{\rho L d^2}{cv} t \Rightarrow Dq(T_0) \gg 1,84^\circ C$$

Mathématiquement, dans l'équation du 2.3.1-, on développe: $\exp(e) \gg 1 + e$.

2.3.5.b- On déduit de ce qui précède la densité maximale de courant: $d_{max} \gg \sqrt{\frac{cv(q_{smax} - q_{amb})}{\rho L T_0}}$

2.3.5.c- AN: $(d_{max})_{Cu} \gg 294A.mm^{-2}$ $(d_{max})_{Al} \gg 198A.mm^{-2}$

2.3.5.d- On calcule F à partir de la formule:

$$F = pBLd(R_e - R_i) \Rightarrow F_{Cu} = 576N \quad F_{Al} = 388N$$

2.3.5.e- En régime permanent, $P_J R_{th} = \frac{\rho}{2\alpha} (R_e - R_i) d^2 = Dq$, dont on déduit:

{

Troisième partie: Étude électromécanique et thermique

3.1- Masse du solénoïde:

La masse du solénoïde est égale à: $M = v p L (R_e - R_i)$; $M_{Cu} = 21,8g$; $M_{Al} = 6,62g$

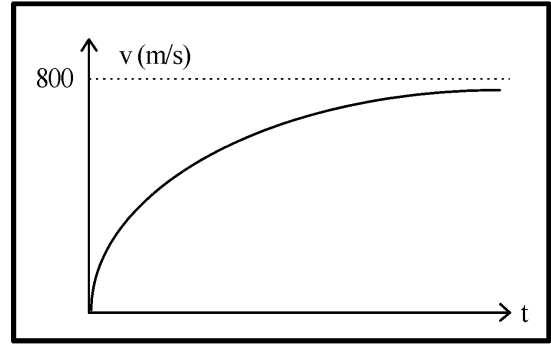
3.2- Solénoïde ouvert:

L'équation différentielle $M \frac{dv}{dt} + mv = F$ s'intègre en:

$$v = \frac{F_0}{m} \left[1 - \exp\left(-\frac{m}{M}t\right) \right]$$

La constante de temps mécanique a pour valeur:

$$(t_m)_{Cu} = M/m = 0,218s$$



3.3- Solénoïde alimenté:

3.3.1- Les équations rappelées par l'énoncé sont les suivantes:

$$1.2.2-F = k_f NI; 1.3.3-E = Nk_f v; 1.6.1-U = E + L \frac{dI}{dt} + R_b I$$

Par élimination de I entre les équations: $M \frac{dv}{dt} + mv = k_f NI$, et: $U = Nk_f v + L \frac{dI}{dt} + R_b I$, on trouve:

$$U = \frac{LM}{k_f N} \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{Lm + MR_b}{k_f N} \frac{dv}{dt} + \left(k_f N + \frac{R_b m}{k_f N} \right) v; a = \frac{LM}{k_f N}; b = \frac{Lm + MR_b}{k_f N}; c = k_f N + \frac{R_b m}{k_f N}$$

3.3.2- La première approximation: $t_e = \frac{L}{R_b} \ll t_m = \frac{M}{m}$ s'écrit: $Lm \ll R_b M \Rightarrow b \gg \frac{MR_b}{k_f N}$.

La deuxième approximation conduit à: $c \gg k_f N$.

Une solution particulière est: $v = U_0/c$.

On cherche la solution générale de l'équation sans second membre sous la forme: $v = V \exp\left(-\frac{t}{t}\right)$; on aboutit à l'équation caractéristique: $ct^2 - bt + a = 0$, dont on supposera les racines réelles positives: $D = b^2 - 4ca > 0$; $t_1 t_2 = a/c > 0$ et $t_1 + t_2 = b/c > 0$.

Il vient alors: $t_1 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ca}}{2c}$; $t_2 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ca}}{2c}$

À partir de la solution: $v(t) = V_A \exp\left(-\frac{t}{t_1}\right) + V_B \exp\left(-\frac{t}{t_2}\right) + V_C$, les conditions initiales donnent:

$$v(t=0) = V_A + V_B + \frac{U_0}{c}; \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = 0 = -\frac{V_A}{t_1} - \frac{V_B}{t_2}$$

dont on tire: $V_A = \frac{U_0}{c} \frac{t_1}{t_2 - t_1}$; $V_B = -\frac{U_0}{c} \frac{t_2}{t_2 - t_1}$, soit:

$$t_1 = \frac{MR_b - \sqrt{(MR_b)^2 - 4LM(k_f N)^2}}{2(k_f N)^2}; t_2 = \frac{MR_b + \sqrt{(MR_b)^2 - 4LM(k_f N)^2}}{2(k_f N)^2}; V_C = \frac{U_0}{k_f N}$$

$$V_A = \frac{U_0}{k_f N} \frac{MR_b - \sqrt{(MR_b)^2 - 4LM(k_f N)^2}}{2\sqrt{(MR_b)^2 - 4LM(k_f N)^2}}; V_B = -\frac{U_0}{k_f N} \frac{MR_b + \sqrt{(MR_b)^2 - 4LM(k_f N)^2}}{2\sqrt{(MR_b)^2 - 4LM(k_f N)^2}}$$

L'hypothèse $t_2 \gg t_1$ implique $V_A \ll V_B$ et $\exp\left(-\frac{t}{t_1}\right) \ll \exp\left(-\frac{t}{t_2}\right)$; par suite:

$$v(t) \gg \frac{U_0}{k_f N} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{t_2}\right) \right]$$

3.3.3- Plusieurs essais me conduisent toujours à un D négatif, donc à un t_2 complexe, ce qui ne correspond pas à l'esprit dans lequel a été rédigé l'énoncé.

3.4- Analyse finale:

3.4.1- Les constantes de temps ont des ordres de grandeur très différents:

$$t_e = 128ms \ll t_m = 0,218s \ll t_{th} = 7,23ks$$

3.4.2- La question 3.2- conduit au résultat: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{M}$

3.4.3- On calcule donc: $a_{max} = \frac{F_{max}}{M} = \{$

3.4.4- De la question **2.3.5.e-**, on tire: $a_{maxC} = \{$

3.4.5- On constate que c'est l'aluminium qui s'avère le plus intéressant, contrairement à l'idée que l'on a couramment.