Corrigé ESIM 99 filière PC Phys II

1.) Ondes dans les métaux

$div\,\dot{D} = \rho_l = div\,\dot{E}$

$div\,\vec{B} = 0$

$rot(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$rot(\vec{H}) = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ou $rot(\vec{B}) = \mu(\vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

1.1) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}) = \overrightarrow{grad}\,div\,\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{rot}\,\vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho_l}{\varepsilon}\right) - \Delta\vec{E} = -\mu\left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\right)$ d'où la relation donnée.

$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{B}) = \overrightarrow{grad}\,div\,\vec{B} - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B} = -\mu\left(\overrightarrow{rot}(\vec{j}) + \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}(\vec{E})\right) = -\mu\left(\sigma\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}\right)$ or $\dot{B} = \mu\dot{H}$, on obtient donc bien la deuxième relation.

1.2) $div\,\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = 0 = \varepsilon\mu\, div\dot{E} = -\frac{\rho_l}{\tau}$ soit $0 = \frac{\rho_l}{\varepsilon} + \frac{\partial \rho_l}{\partial t}$. La solution de cette équation en un point fixé est de la forme : $\rho_l = a\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$, temps caractéristique de la décroissance de la charge. $\varepsilon \approx 10^{-11}$ u.s.i. et $\sigma \approx 10^{7}$ u.s.i. donc $\tau \approx 10^{-18}$ s. Ce temps caractéristique est en général très inférieur au temps caractéristique (période) des variations de $\dot{E}$ et $\dot{B}$ donc on peut considérer ρ_l nul à tout instant et en tout point du conducteur.

1.3) En remplaçant dans la première équation : $-\underline{k}^2\dot{\underline{E}} = -\mu\omega^2\varepsilon\dot{\underline{E}} - \mu\sigma\dot{\underline{E}} = 0$ d'où la relation de dispersion : $\underline{k}^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - j\mu\sigma\omega$

1.4) $\left\|\frac{\partial \dot{D}}{\partial t}\right\| = \varepsilon\omega E_0$ et $\left\|\dot{j}_l\right\| = \sigma E_0$ donc $Q = \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} = \tau\omega \approx 10^{-18}\,\omega$. Pour une fréquence optique $\omega < 10^{16}\ s^{-1}$ donc $Q < 10^{-2}$.

1.5) $\underline{k}^2 = \mu\varepsilon\omega^2\left(1 - j\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right) = \varepsilon_r\mu_r\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{j}{Q}\right)$ ou $\underline{k}^2 = \varepsilon_r\mu_r\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2\left(1 - \frac{j}{Q}\right)$

1.6) $\exp(j(\omega t - \underline{k}z)) = \exp(-k_i z)\exp j(\omega t - k_r z)$: le terme de propagation est en $(\omega t - k_r z)$, ce qui correspond bien à une onde se propageant vers $z > 0$ si $k_r > 0$.

$\underline{k}^2 = k_r^2 - k_i^2 - 2j\,k_r k_i = A\left(1 - \frac{j}{Q}\right)$ d'où $k_r^2 - k_i^2 = A$ (1) et $2k_r k_i = A\frac{1}{Q}$ (2). En combinant (1) et (2) on obtient l'équation de k_r :

$$k_r^4 - Ak_r^2 - \frac{A^2}{4Q^2} = 0$$

qui admet pour solution : $k_r^2 = \frac{1}{2}A + A\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}$ et $k_i = \frac{A}{2Q k_r}$

Q —> ∞ => $k_r = \sqrt{A}$ et k_i —>0 dans ce cas la propagation se fait sans absorption car le terme de conduction, donc la dissipation correspondante, devient négligeable.

1.7) $\underline{\dot{E}} = E_0 e^{-k_i z}\exp j(\omega t - k_r z)\vec{u}_x$ soit en réel : $\dot{E} = E_0 e^{-k_i z}\cos(\omega t - k_r z)\vec{u}_x$

$\overrightarrow{rot}\underline{\dot{E}} = -j\underline{k}\,\underline{\dot{E}} = -j\,\underline{k}\,E_0\exp j(\omega t - \underline{k} z)\vec{u}_y = -j\,\underline{\dot{B}}$ soit : $\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{k}}{\omega}E_0\exp j(\omega t - \underline{k} z)\vec{u}_y$ or

$\underline{k} = k_r - j k_i = \sqrt{k_r^2 - k_i^2}\,e^{-j\varphi}$ donc $\underline{\vec{B}} = \frac{\sqrt{k_r^2+k_i^2}}{\omega}E_0 e^{-k_i z}\exp j(\omega t - k_r z - \varphi)\vec{u}_y$ donc en grandeur réelle : $\vec{B} = \frac{\sqrt{k_r^2+k_i^2}}{\omega}E_0 e^{-k_i z}\cos(\omega t - k_r z - \varphi)\vec{u}_y$

1.8) $\vec{\Pi} = E_0^2\frac{\sqrt{k_r^2+k_i^2}}{2\omega}e^{-2k_i z}\cos(\omega t - k_r z)\cos(\omega t - k_r z - \varphi)\vec{u}_z$ dont la valeur moyenne est :

$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}E_0^2\frac{\sqrt{k_r^2+k_i^2}}{2\omega}e^{-2k_i z}\cos\varphi\,\vec{u}_z = \frac{1}{2}E_0^2\frac{k_r}{2\omega}e^{-2k_i z}\vec{u}_z$

1.9)

en négligeant 1 devant on obtient : $k_r = \sqrt{\frac{A}{2Q}}$ et $k_i = \frac{A}{2Q k_r} = \sqrt{\frac{A}{2Q}} = k_r$ l'approximation faite correspond à $A = A\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}} = A + \frac{A}{Q} = A\left(1+\frac{1}{Q}\right)$ terme qui intervient dans l'expression de k_r^2. Donc dans l'expression de k_r on a : $\sqrt{A}\sqrt{1+\frac{1}{Q}} = \sqrt{A}\left(1+\frac{1}{2Q}\right)$ on a donc négligé $\frac{1}{2Q}$ devant 1, ce qui est vrai à mieux que 10^{-2} près si Q ≤ .

Or Q = $\frac{\omega}{\alpha} = \frac{\omega}{\alpha}\frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{\alpha}\frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\alpha}\frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{1}{50}$ d'où $\lambda_0 \geq 14{,}4$ nm

$$k_r = k_i = \sqrt{\omega\mu\alpha}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega\mu\alpha}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\alpha}{2}} = \frac{1}{\delta}$$

1.9.2) $A = \varepsilon\,\mu\,\omega^2$ et or

$\underline{k} = k_r - j k_i = \frac{1}{\delta}(1-j) = \frac{\sqrt{2}}{\delta}\exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right)$ donc en remplaçant dans les expressions des champs :

$\vec{E} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)\vec{u}_x$ et $\vec{H} = \frac{\dot{B}}{\mu} = \frac{\sqrt{2}}{\omega\mu}E_0 e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)\vec{u}_y$ le déphasage est de $-\frac{\pi}{4}$

1.9.3) δ a la dimension de l'inverse de k c'est donc une longueur. δ caractérise la profondeur de pénétration de l'onde dans le milieu.

1.9.4) $v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \omega\delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\alpha}}$ le milieu est donc dispersif.

1.9.5) $\langle w_e \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 e^{-2\frac{z}{\delta}}$ et $\langle w_b \rangle = \frac{1}{2\mu_0}\langle B^2 \rangle = \frac{1}{4\mu_0}\frac{2}{\omega^2\delta^2} E_0^2 e^{-2\frac{z}{\delta}} = \frac{E_0^2}{4}\frac{\sigma}{\omega} e^{-2\frac{z}{\delta}}$

donc $\frac{\langle w_e \rangle}{\langle w_b \rangle} = \frac{\omega\varepsilon_0}{\sigma} = Q$ Q donne donc la répartition de l'énergie, entre énergie magnétique et énergie électrique. Dans le cas d'un métal bon conducteur σ est grand donc Q est petit (tant que ω n'est pas trop grand), et l'énergie est principalement sous forme magnétique, à cause des courants induits dans le métal.

1.9.6) $Q = 9{,}59\ 10^{-13}$; $\delta = 66{,}1\ \mu m$; $k_r = \frac{2\pi}{\lambda}$ d'où $\lambda = 415\ \mu m$; $v_\phi = 415\ m.s^{-1}$ la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique est très faible dans le cuivre par rapport à celle du son. La valeur de δ montre que l'onde électromagnétique pénètre très peu dans le métal.

1.9.7) a- $\langle \vec{r} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2\sigma}} \exp(-\sqrt{2\omega\varepsilon\varepsilon_0}\, z)\vec{u}_z$

en z=0 : $\langle \vec{r} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0}\sqrt{\frac{\omega\varepsilon\varepsilon_0}{2\sigma}}\vec{u}_z$ et en z = Δe : $\langle \vec{r} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0}\sqrt{\frac{\omega\varepsilon\varepsilon_0}{2\sigma}} \exp(-\sqrt{2\omega\varepsilon\varepsilon_0}\, e)\vec{u}_z$

b- faisons un bilan d'énergie : soit w l'énergie contenue dans la plaque :

$\frac{dw}{dt} = \langle \Pi \rangle_i ab - \langle \Pi \rangle_f ab = \langle P \rangle$ (puissance perdue) : $\langle P \rangle = ab\frac{E_0^2}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}\left(1 - \exp(-\sqrt{2\omega\varepsilon_0\sigma}\, e)\right)$ en considérant Δe petit : $\langle P \rangle = ab\frac{E_0^2}{2}\sigma e$

c- $U \approx E_0 a = R\, i$ avec $R = \frac{a}{\sigma S} = \frac{a}{\sigma b e}$ $P_J = \frac{U^2}{R} = \frac{E_0^2 a^2 \sigma b e}{2a} = \langle P \rangle$ l'énergie électromagnétique perdue est dissipée sous forme de chaleur.

2.) Ondes sur une corde tendue avec amortissement le long de l'axe Oz :

2.1) L'équation de propagation s'écrit : $\sigma\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \alpha\frac{\partial y}{\partial t}$

2.2) $\underline{k}^2 = \frac{\omega}{F}\alpha^2 - j\frac{\omega}{F}$ on peut établir l'analogie avec la relation du 1.5 à l'aide des correspondances : $\varepsilon \leftrightarrow \mu$; $\mu \leftrightarrow$; $\sigma \leftrightarrow \alpha$

2.3) en écrivant : $\underline{k}^2 = A\left(1 - j\frac{1}{Q}\right)$ avec $A = \frac{\omega}{F}\alpha^2$ et $Q = \alpha\frac{\omega}{\alpha}$, on peut transposer les résultats du (1.9.2): $k_r = k_i = \sqrt{\omega\alpha}\sqrt{\frac{1}{2\omega\alpha}} = \sqrt{\omega\alpha\omega}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$ on obtient alors :

$\langle e_c \rangle = \frac{1}{2}\mu\left\langle \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \right\rangle = \frac{1}{4}\mu\omega^2 y_0^2 e^{-2\frac{z}{\delta}}$; $\frac{\partial \underline{y}}{\partial t} = j\omega\underline{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega e^{j\frac{\pi}{4}}$ donc en grandeur réelle :

$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) y_0 e^{-\frac{z}{\delta}}$ et $\langle e_p \rangle = \frac{F}{4}\frac{2}{\omega^2} y_0^2 e^{-2\frac{z}{\delta}} = \frac{F}{4}\frac{\delta}{F} y_0^2 e^{-2\frac{z}{\delta}}$ par conséquent :

$\frac{\langle e_c \rangle}{\langle e_p \rangle} = \frac{\omega\mu}{2} = Q$ l'expression est donc la même qu'en (1.9.5.)

3.) Onde thermique dans un milieu :

3.1) résultat du cours : $\lambda\frac{\partial T}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

3.2) $\mu\lambda j\omega - \mu\lambda\omega\underline{k}^2 = 0$ soit : $\underline{k}^2 = j\frac{\omega\lambda}{\mu} = \frac{1+j}{2}\frac{\omega\lambda}{\mu}$ donc

$\underline{k} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega\lambda}{\mu}} = \frac{1}{\delta}(1+j)$ avec $\sqrt{\frac{\omega\lambda}{2\mu}} = \frac{1}{\delta}$ et $T(z,t) = T_0 e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$;

$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \sqrt{\frac{2\omega\mu}{\lambda}}$

3.3) $\frac{V_T}{V_B} = \sqrt{\frac{\omega\mu\lambda}{\lambda}}$ pour le cuivre : 9,49 10^{-2} pour le fer : 0,210

la différence entre ces valeurs est liée aux différences sur les valeurs de σ, μ et λ essentiellement. On voit le rôle plus particulièrement important joué par μ et λ.