

Ourdissoir sectionnel.

Partie II « éviter la casse de fils ».

Q 1) Réglage de l'angle des sabots.

En appliquant les relations de fermeture sur le mécanisme on trouve :

Pour les angles : $(i_1, i_3) + (i_3, i_4) + (i_4, i_1) = 0$; ce qui donne : $\Gamma(t) + \gamma(t) - \beta(t) = 0$.

Pour les vecteurs position : $\vec{AE} + \vec{ED} + \vec{DC} + \vec{CA} = 0$ ce qui donne :

$$\frac{D_c}{2} \cdot \vec{j}_1 + r \cdot \vec{i}_4 - s \cdot \vec{j}_3 - [l_0 - u(t)] \cdot \vec{i}_1 - q \cdot \vec{j}_1 = 0$$

En projection dans la base B1 cela conduit au système suivant :

$$\text{Sur } \vec{i}_1 : r \cdot \cos \beta(t) + s \cdot \sin \Gamma(t) - l_0 + u(t) = 0$$

$$\text{Sur } \vec{j}_1 : \frac{D_c}{2} + r \sin \beta(t) - s \cos \Gamma(t) - q = 0$$

Q 2) Diamètre maximal d'enroulement du fil.

D'après les figures 2 et 3, Le diamètre maximal d'enroulement sera obtenu lorsque le fil atteindra le point F et que l'angle β sera maximal lui aussi. La courbe de la figure 6 montre que $\beta_{\max}$ vaut $10^\circ 30'$.

Le diamètre s'exprime par la relation $\varnothing_{\max i} = D_c + 2L \sin \beta_{\max i} = 1284,47 \text{ mm}$.

Q 3) Etude de la variation de β .

La formule de TAYLOR pour le développement limité de β permet d'écrire :

$$\Delta \beta = \frac{d\beta}{du} \cdot \Delta u + \frac{d^2\beta}{du^2} \cdot \frac{\Delta u^2}{2!} + \dots + \frac{d^n\beta}{du^n} \cdot \frac{\Delta u^n}{n!} + \Delta u^n \varepsilon(\Delta u)$$

Dans la plage de variation de β , la dérivée $\frac{d\beta}{du}$ diminue de manière quasi linéaire et la dérivée seconde $\frac{d^2\beta}{du^2}$ est constante et négative. En conséquence la valeur $\Delta \beta_{\max i}$ sera identifiée à l'origine de cette plage de variation c'est à dire pour la valeur $\beta = 6^\circ$ qui correspond par ailleurs à $u = 85 \text{ mm}$ environ.

$$\Delta \beta_{\max i} = \left. \frac{d\beta}{du} \right|_{u=85} \cdot \Delta u + \left. \frac{d^2\beta}{du^2} \right|_{u=85} \cdot \frac{\Delta u^2}{2}$$

La relation devient alors :

L'application numérique donne $\Delta \beta_{\max i} = 5,2 \cdot 10^{-2} \cdot \Delta u - 1,4 \cdot 10^{-4} \cdot \Delta u^2$ (les unités sont celles de la figure 6) ; que

l'on peut approximer par la relation $\Delta \beta_{\max i} = 5,2 \cdot 10^{-2} \cdot \Delta u$ dans la mesure où les variations de u sont de l'ordre de quelques mm...

Q 4) Expression littérale du rapport $\frac{\Delta u}{\Delta \theta_m}$

Il s'agit cette fois d'étudier le mécanisme de transformation de mouvement entre le moteur et le système vis écrou.

Pour la partie moto-réductrice la loi de conversion s'écrit : $\frac{\dot{\alpha}}{\theta_m} = k_m \cdot k_r \cdot \frac{D_{mot}}{D_{rece}}$. (sans dimension). Sous forme

$$\Delta\alpha = k_m \cdot k_r \cdot \frac{D_{mot}}{D_{rece}} \cdot \Delta\theta_m$$

variationnelle cela se traduit par

Pour le système vis écrou on écrira, compte tenu des unités imposées : $\Delta u = p \cdot \Delta\alpha$

$$\Delta u = p \cdot k_m \cdot k_r \cdot \frac{D_{mot}}{D_{rece}} \cdot \Delta\theta_m$$

En conséquence :

Q 5) Calcul de k_r .

D'après le CdCf il faut, pour éviter de casser le fil, que l'incertitude sur l'angle du sabot -c'est à dire $\Delta\beta_{\max}$ - reste inférieure à 0.025° en valeur absolue. De plus, comme nous y invite l'énoncé, on considère que la phase de freinage du moteur détermine justement cette incertitude. Dans ces conditions, et compte tenu des résultats

$$k_r = \frac{D_{rece}}{p \cdot k_m \cdot D_{mot} \cdot \Delta\theta_m} \cdot \frac{\Delta\beta_{\max}}{\left. \frac{d\beta}{du} \right|_{u=85}}$$

des questions 3 et 4 on pourra écrire :

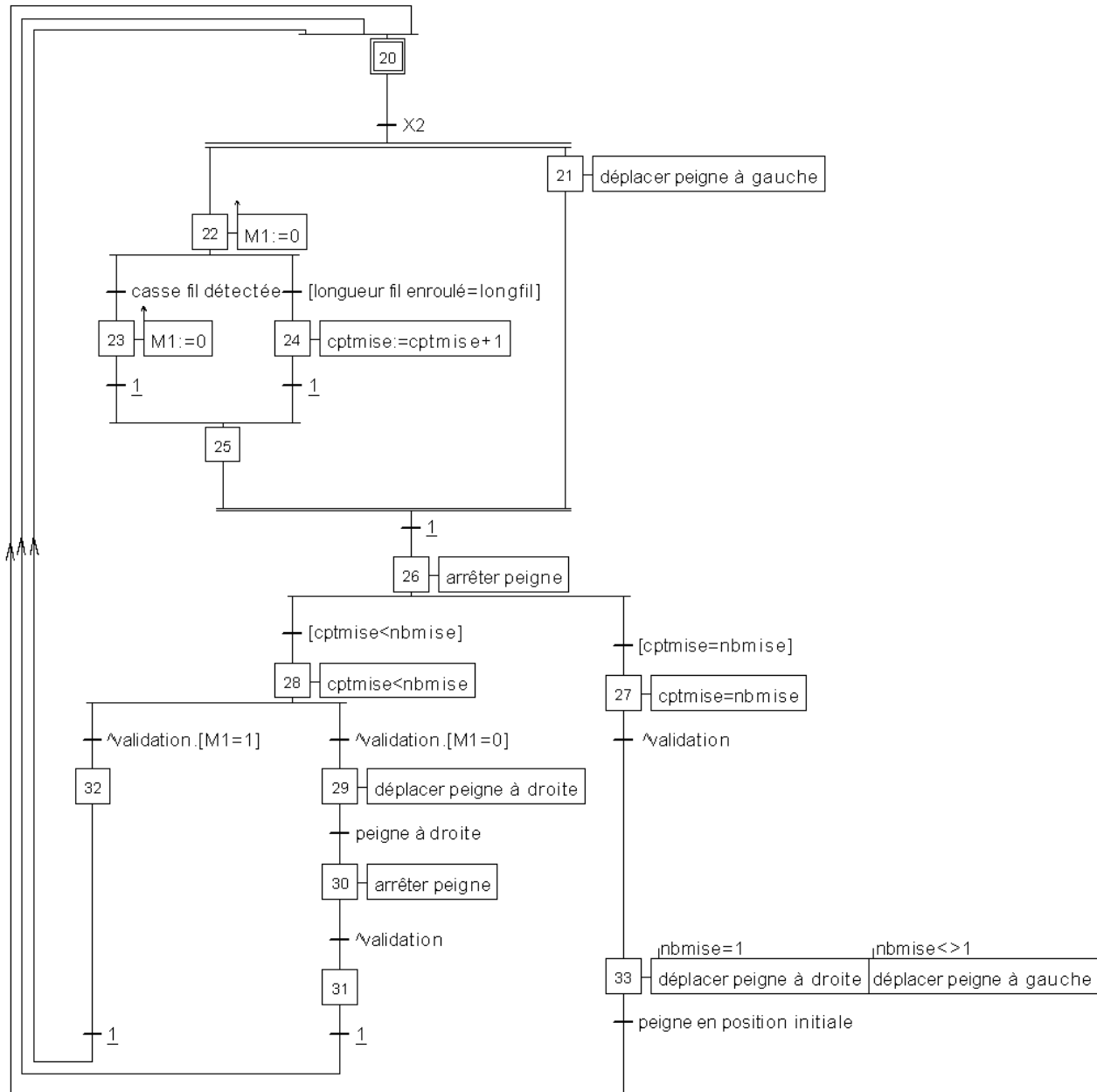
$$k_r = \frac{360.46.240}{3.50.110.360} \cdot \frac{0.025}{0.052} = 0.32$$

résultat suivant :

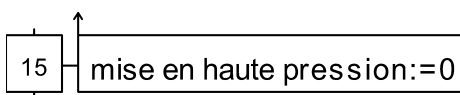
Partie 3 : Réagir en cas de casse de fils.

Q 6) Grafcet complété du système.

Pour tenir compte des contraintes imposées dans le cahier des charges on suggère les compléments définis ci-dessous pour le grafcet « gestion du peigne ».



De la même manière on suggère de compléter le grafcet « gestion du tambour » comme suit :



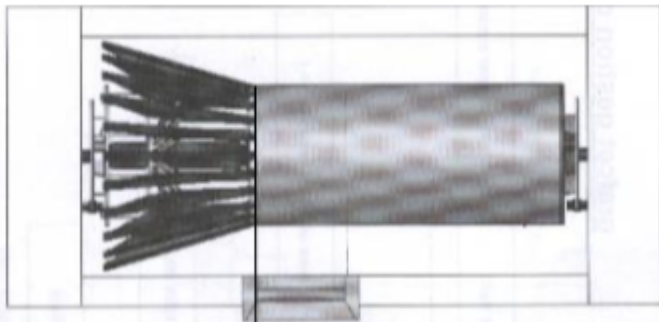
Q 7) Positionnement du peigne.

Figure a : peigne en position initiale

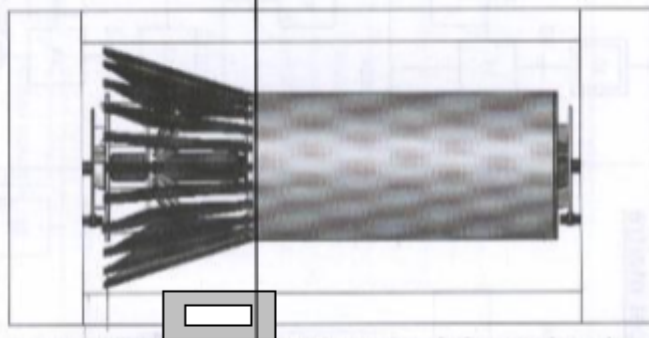


Figure b : peigne en fin de fabrication de la premise mise

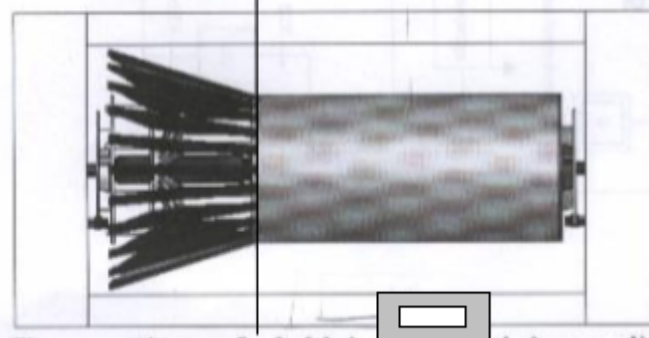
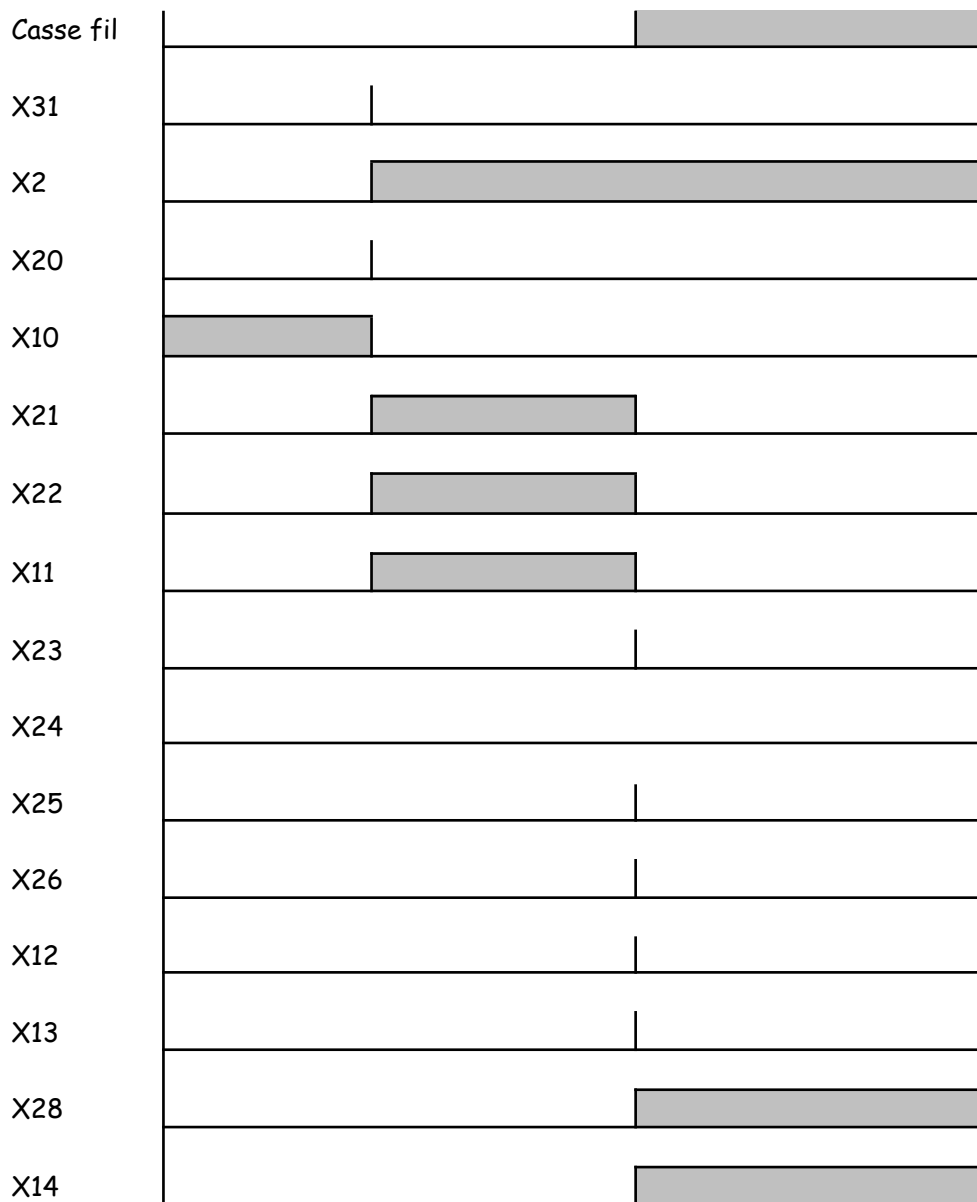


Figure c : peigne en fin de fabrication de la chaîne complète

L'analyse des positions extrêmes du peigne permet de compléter les actions associées à l'étape 33 du grafset ci-dessus.

Nota : la figure ci-contre a été définie pour une bobine de trois mises.

Q 8) Chronogramme.**Q 9) Durée effective de freinage.**

Pour le modèle Grafcet on considère que, pour des raisons de stabilité de modèle, la durée de franchissement d'une transition ne peut être nulle. Notons Δt cette durée.

Dans ce cas le graphe de situation qui nous concerne devient :

Si à $t_0=0s$: $S_0=\{21,22,11,...\}$, alors $\rightarrow t_1+\Delta t$: $S_1= (21,23,11,...) \rightarrow t_1+2\Delta t$: $S_2= (21,25,12,...) \rightarrow t_1+3\Delta t$: $S_3= (26,13,...) \rightarrow t_1+4\Delta t$: $S_5= \{28,14,...\}$; les situations fugaces étant identifiées ici par des parenthèses.

On retiendra dans ce contexte le fait que la séquence « 12, 13, 14 » aura été effectuée dans un laps de temps de $3\Delta t$; durée supposée aussi petite que l'on veut bien que non nulle...

Toujours dans cette hypothèse on doit pourtant considérer que si la commutation du contacteur électrique du moteur se fait en temps masqué (elle est de 8 ms) , il ne peut pas en être de même pour le frein puisque le début de la fermeture des étriers ne pourra se faire que lorsque la pression sera suffisante.

On est donc conduit à considérer que le début effectif du freinage se fait à $t_1+t_2+t_4$ soit après un délai $\Delta T = 27 \text{ ms}$.

Nota : Dans la réalité, la durée Δt est liée au temps de réponse et de scrutation de l'automate. Cette durée a pour ordre de grandeur la dizaine de ms et devrait éventuellement être prise en compte. Comme rien n'est dit à ce propos dans le sujet le corrigé se limitera à ce qu'un étudiant sera capable de fournir comme réponse.

Q 10) Angle de freinage.

Pour une même vitesse de défilement de fil l'angle maximal parcouru pendant la phase préparatoire au freinage

est obtenue lorsque le diamètre d'enroulement est minimal et vaut $\frac{2.V.\Delta T}{D_c}$ (en radians). L'angle résiduel de

freinage vaut alors $\theta_f = 2 \left(\pi - \frac{V.\Delta T}{D_c} \right)_{rad}$. L'application numérique donne : 5,69 rad soit 326,37°

Q 11) Module du couple de freinage.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à l'équipage mobile : $\frac{dEc(\Sigma / Rg)}{dt} = P_{Gal}(\bar{\Sigma} / \Sigma) + P_{Int}(\Sigma)$. En admettant que les liaisons soient parfaites -sauf bien évidemment au niveau du frein- et que le moteur délivre un couple nul, alors l'expression précédente donne après simplification : $-C_f = J_{eqT} \ddot{\theta}_T$. Si le couple de freinage est constant alors le mouvement sera considéré comme uniformément varié.

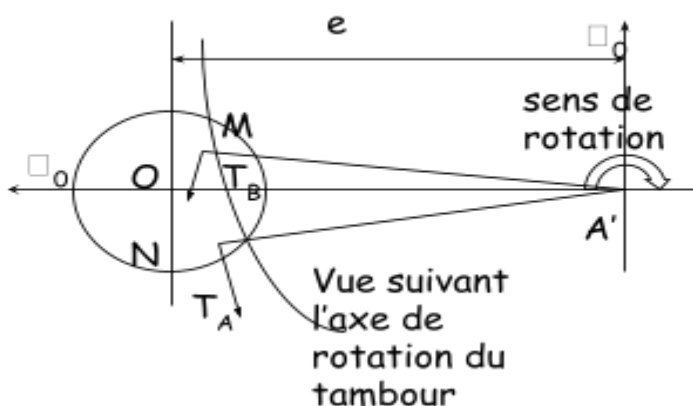
Pour un tel mouvement on sait que l'arrêt se produit après un délai $t_f = \frac{J_{eqT} \cdot \dot{\theta}_i}{C_f}$ où $\dot{\theta}_f$ désigne la vitesse en

début du freinage, et l'espace parcouru vaut $\theta_f = \frac{\dot{\theta}_i}{2} t_f$. Le résultat cherché est donc tout simplement :

$$C_f = \frac{J_{eqT} \cdot \dot{\theta}_i^2}{2 \cdot \theta_f} \quad \text{En remplaçant la vitesse initiale par son expression on trouve ainsi :} \quad C_f = \frac{2 \cdot J_{eqT} \cdot V^2}{\theta_f \cdot D_c^2}$$

Ce résultat aurait pu être démontré plus directement grâce à l'intégrale première de l'énergie cinétique.

Q 12) Torseur d'action de freinage pour un disque.



La figure ci-contre représente la distribution supposée des composantes tangentielles du champ de pression au niveau du contact disque / piston. Il s'agit a priori d'une distribution orthoradiale puisque le frottement de glissement s'oppose au glissement. Cette distribution ne peut admettre comme torseur résultant un Glisseur en O. Pour s'en convaincre il suffit de prendre quatre points M et N et leurs symétriques par rapport à O par exemple. Pour respecter donc l'hypothèse proposée dans le sujet on sera amené à admettre une distribution tangentielle uniforme de direction $\neq 0$.

$$\left\{ T_{p_i/D} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} R_{p_i/D} = P_{hp} \cdot \frac{\pi \cdot d_p^2}{4} \cdot (\pm j_0 - f \cdot k_0) \\ 0 \end{array} \right\}$$

On proposera donc le torseur suivant :

$$\left\{ T_{p_{1+2}/D} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} R_{p_{1+2}/D} = -P_{hp} \cdot \frac{\pi \cdot d_p^2}{2} \cdot f \cdot k_0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

pistons 1 et 2 :

Q 13) Calcul de la pression P_{hp} .

Le couple de freinage se déduit de l'expression du torseur en A'. En tenant compte des quatre pistons on obtient

$$C_f = P_{hp} \cdot \pi \cdot d_p^2 \cdot f \cdot e \quad \text{en module. En tenant compte du résultat de la question précédente il reste :}$$

$$P_{hp} = \frac{2 \cdot J_{eqT} \cdot V^2}{\pi \cdot d_p^2 \cdot f \cdot e \cdot \theta_f \cdot D_c^2} \quad \text{. L'application numérique donne } 65,5 \cdot 10^5 \text{ Pa soit } 65 \text{ bar environ.}$$

Q 14) Critère de sécurité « casse »

Ce critère est à priori vérifié puisqu' avec une pression de 80 bar le tambour s'arrêtera en moins d'un tour comme le stipule le CdCf.

1. Partie IV : Redémarrer rapidement après une casse de fil.

1.1. Loi de variation de la vitesse.

Q 15) Accélération maxi après casse.

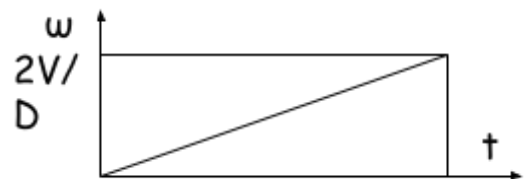
La tension maxi ne doit pas dépasser 25% de la tension de pose $T_0 = 0,8 \text{ N}$. Compte tenu de la loi de

comportement du frein de tambour on a alors $0,8 + 0,04 \omega_T \leq 1,25 \cdot T_0 = 1,25 \cdot 0,8$

L'accélération maxi admissible est donc de 5 rad.s^{-2} .

Q 16) Loi de variation de la vitesse angulaire.

Pendant la phase de démarrage la loi de vitesse est donc tout simplement :



1.2. Loi de variation de la commande du moteur

Q 17) Critique des hypothèses.

Négliger les pertes par frottement dans la transmission revient à sous estimer la puissance requise pour l'entraînement du tambour. De ce fait la phase d'accélération sera moins rapide que prévue dans le cas limite et l'effort de tension n'en sera que plus faible.

Q 18) Inertie équivalente ramenée au moteur.

L'expression de l'énergie cinétique d'un solide animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe est immédiate. On peut donc écrire chacune des énergies demandées à partir des paramètres fondamentaux et réduire toutes ces expressions à l'arbre moteur.

$$Ec_m = \frac{1}{2} \cdot (J_m + J_{p1}) \omega_m^2$$

$$Ec_i = \frac{1}{2} \cdot (J_{p2} + J_{p3}) \omega_i^2 = \frac{1}{2} \cdot (J_{p2} + J_{p3}) k_1^2 \omega_m^2$$

$$Ec_t = \frac{1}{2} \cdot (J_{p4} + J_t) \omega_t^2 = \frac{1}{2} \cdot (J_{p4} + J_t) k_1^2 k_2^2 \omega_m^2$$

L'inertie équivalente ramenée au moteur se définit comme l'inertie entraînée par le moteur qui a la même énergie

cinétique que l'ensemble. Son expression est donc : $J_{eqM} = J_m + J_{p1} + (J_{p2} + J_{p3}) k_1^2 + (J_{p4} + J_t) k_1^2 k_2^2$.

Q 19) Moment résistant engendré par les fils.

$$C_{fils} = 500 \cdot T \cdot \frac{D}{2} = 500 \cdot (0,8 + 0,04 \dot{\omega}_T) \frac{D}{2} = 200D + 10D \dot{\omega}_T$$

Logiquement

On en tire : $C = 200D$ et $\lambda = 10D$.

Q 20) Fonctions de transfert de la commande moteur.

Aux équations électriques et de couplage il faut ajouter le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_{eqM} \omega_m^2 \right) = C_m \cdot \omega_m - C_{fils} \cdot \omega_T$$

pour que le système soit complet. L'équation supplémentaire est , qui après

simplification se réduit à $J_{eqM} \dot{\omega}_m = C_m - C_{fils} \cdot k_1 \cdot k_2$.

Dans le domaine de Laplace, et compte tenu des conditions initiales nulles, l'ensemble des équations temporelles est converti dans le système suivant :

$$U(p) = E(p) + (R + L \cdot p) \cdot I(p)$$

$$E(p) = K \cdot \Omega_M(p)$$

$$C_M(p) = K \cdot I(p)$$

$$J_{eqM}(p) \cdot p \cdot \Omega_M(p) = C_M(p) - k_1 \cdot k_2 \cdot C_{fils}(p)$$

Les transmittances cherchées sont donc :

$$F_1(p) = \frac{1}{R + L \cdot p}, \quad F_2(p) = K, \quad F_3(p) = \frac{1}{J_{eqM} \cdot p}, \quad F_4(p) = K, \quad F_5(p) = \lambda \cdot p, \quad F_6(p) = k_1 \cdot k_2.$$

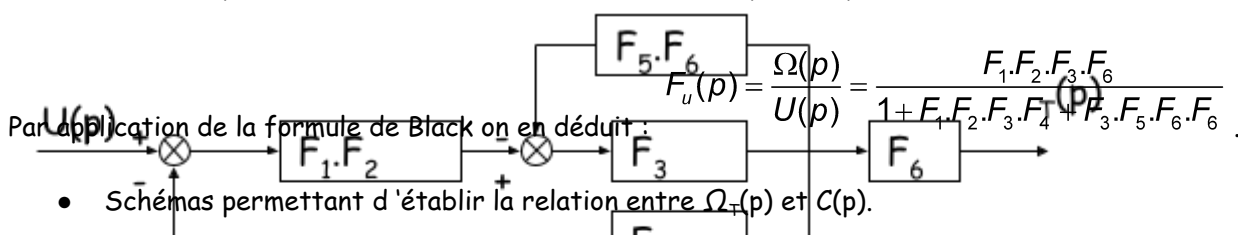
Q 21) Nature du système.

Le système décrit est certes bien un système dynamique mais en aucun cas il ne s'agit d'un système asservi puisqu'il ne comporte ni consigne ni mesure.

Q 22) Fonctions de transfert...

Le système étudié est un système à deux entrées. Pour déterminer la fonction de transfert globale on utilisera les propriétés de linéarité. Ainsi on forcera la perturbation $C(p)$ à 0 afin de déterminer la relation entre $\Omega_T(p)$ et $U(p)$; de même qu'on mettra à 0 l'entrée $U(p)$ pour déterminer $\Omega_T(p)$ en fonction de $C(p)$. Les schémas blocs ci-dessous résument les étapes de la résolution. Les manipulations des schémas s'appuie sur l'algèbre des schémas blocs.

- Schémas permettant d'établir la relation entre $\Omega_T(p)$ et $U(p)$.



$$F_c(p) = \frac{\Omega(p)}{C(p)} = \frac{-F_3 \cdot F_6 \cdot F_6}{1 + F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot F_4 + F_3 \cdot F_5 \cdot F_6 \cdot F_6}.$$

Par application de la formule de Black on en déduit :

(on s'assure au passage que les deux fonctions ont même dénominateur...)

$$\Omega(p) = \frac{F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot F_6}{1 + F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot F_4 + F_3 \cdot F_5 \cdot F_6 \cdot F_6} \cdot U(p) + \frac{-F_3 \cdot F_6 \cdot F_6}{1 + F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot F_4 + F_3 \cdot F_5 \cdot F_6 \cdot F_6} \cdot C(p)$$

Le résultat attendu est donc :

Autre résolution de la question 22 (analytique cette fois):

Application du théorème de superposition (idem précédemment, mais par lecture directe du schéma-blocs)

*C(p)=0

$$\Omega(p) = F_6 \cdot F_3 \cdot (-F_6 \cdot F_5 \cdot \Omega(p) + F_2 \cdot F_1 \cdot (U(p) - F_4 \cdot \Omega(p) / F_6))$$

$$\text{Soit } \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{F_1 F_2 F_3 F_6}{1 + F_1 F_2 F_3 F_4 + F_3 F_5 F_6 F_6}$$

*U(p)=0

$$\Omega(p) = F_6 \cdot F_3 \cdot (-F_6 \cdot C(p) + F_5 \cdot \Omega(p)) + F_2 \cdot F_1 \cdot (-F_4 \cdot \Omega(p) / F_6)$$

$$\text{Soit } \frac{\Omega(p)}{C(p)} = \frac{-F_3 F_6 F_6}{1 + F_1 F_2 F_3 F_4 + F_3 F_5 F_6 F_6}$$

Q 23) Expression simplifiée.

On peut regrouper les termes de l'expression comme suit et ainsi retrouver le résultat attendu :

$$\Omega(p) = \left(\frac{F_1 \cdot F_3 \cdot F_6}{1 + F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot F_4 + F_3 \cdot F_5 \cdot F_6 \cdot F_6} \right) \cdot \left(F_2 \cdot U(p) - \frac{F_6}{F_1} \cdot C(p) \right) = H(p) \cdot (K \cdot U(p) - (R + L \cdot p) k_1 \cdot k_2 \cdot C(p))$$

Le gain statique de H(p) se détermine comme

$$G_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{F_1 \cdot F_3 \cdot F_6}{1 + F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot F_4 + F_3 \cdot F_5 \cdot F_6 \cdot F_6} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{R + Lp} \cdot \frac{1}{J_{eqM} p} \cdot k_1 k_2}{1 + \frac{1}{R + Lp} K^2 \frac{1}{J_{eqM} p} + \frac{1}{J_{eqM} p} \lambda p k_1^2 k_2^2} \right) = \frac{k_1 k_2}{K^2}$$

Si u(t) est un échelon d'amplitude U_0 et de transformée de Laplace $U(p) = \frac{U_0}{p}$;

Si C(t) est un échelon d'amplitude C et de transformée de Laplace $C(p) = \frac{C}{p}$, alors, en application du théorème de la valeur finale la vitesse $\omega_1(t)$ admet pour valeur en régime établi :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \Omega(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot H(p) \cdot \left(K \cdot \frac{U_0}{p} - (R + L \cdot p) k_1 \cdot k_2 \cdot \frac{C}{p} \right) = G_\infty \cdot (K \cdot U_0 - k_1 \cdot k_2 \cdot R \cdot C)$$

1.3. Application numérique :

Q 24) Moment d' inertie maximal.

Sachant que les mises sont toutes coaxiales et qu'elles ont les mêmes dimensions intérieures et extérieures il suffit pour déterminer le moment d'inertie de l'ensemble d'appliquer la formule fournie (qui rappelons-le est celle d'un cylindre creux) en remplaçant la masse d'une mise par celle de l'ensemble. L'application numérique

$$J = \frac{600}{8} (1,27^2 + 0,92^2) = 184,5 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

donne :

Q 25) Inertie équivalente ramenée au moteur.

La question 18 avait permis d'établir l'expression de l'inertie équivalente de l'ensemble ramenée au moteur. Le fait de prendre en compte l'inertie des mises apportera en complément le terme $J_{Mise} k_1^2 k_2^2$ de valeur $1,8 \text{ kgm}^2$.

Les valeurs limites pour l'inertie équivalentes seront donc 1,6 et 3,4 kgm².

Q 26) Vitesse du tambour.

La formule $\omega_T = \frac{2V}{D}$ nous permet de calculer la vitesse du tambour à partir des données fournies. On trouve 20 rad.s⁻¹.

Sachant que l'accélération ne doit pas dépasser les 5 rad.s⁻², on en déduit la durée de la phase d'accélération qui est alors de 4s puisque le mouvement est uniformément accéléré.

Q 27) Tension d'alimentation du moteur.

A partir de la réponse fournie à la question 23 on peut trouver la tension d'alimentation en régime établi :

$$U_0 = \frac{1}{K} \left(\frac{\omega_T(\infty)}{G_\infty} + k_1 \cdot k_2 \cdot R \cdot C \right) \quad \text{avec} \quad C = 500 \cdot T_{\max i} \cdot \frac{D}{2} \quad \text{et} \quad T_{\max i} = 125\% \cdot 0,8N$$

L'application numérique donne

$$U_0 = \frac{1}{1,36} \left(\frac{20}{0,136} + \frac{10}{25} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1,14 \cdot 500 \cdot 1,25 \cdot 0,8 \cdot \frac{1}{2} \right) = 129V$$

Q 28) Loi de commande en tension.

A partir de la figure 12 on peut déterminer par interpolation linéaire la tension nécessaire pour obtenir la vitesse de 20 rad.s⁻¹ en 4 s. Cette tension est de 496V.

La loi ainsi définie est présentée sur la figure ci-contre :

Q 29) Conforme ou non?

A priori la tension disponible n'est pas compatible avec les contraintes du CdCf.

