

ENS LYON PC 2004

- Première partie -

Étude macroscopique de la réflexion et de la transmission

A – Matrice de transfert d'une lame diélectrique

1) $k = n\omega / c$

2) Pour chaque onde plane progressive selon $\vec{u}$: $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c/n}$. D'où : $B(z,t) = \frac{n}{c}(E_+ e^{-ikz} - E_- e^{ikz}) e^{i\omega t}$

3) $\begin{cases} E(0,t) = (E_+ + E_-) e^{i\omega t} \\ B(0,t) = n(E_+ - E_-) e^{i\omega t} / c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_+ = [E(0,t) + cB(0,t)/n] e^{-i\omega t} / 2 \\ E_- = [E(0,t) - cB(0,t)/n] e^{-i\omega t} / 2 \end{cases} \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} \cos(ka) & -i \sin(ka) c / n \\ -i \sin(ka) n / c & \cos(ka) \end{bmatrix}$

4) La transformation $k \rightarrow -k$ correspond à deux ondes "+" et "-" se propageant en sens opposés ; les rôles des deux interfaces sont alors inversés (ceci revient à permuter E_+ et E_-). D'où :

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(ka) & i \sin(ka) c / n \\ i \sin(ka) n / c & \cos(ka) \end{bmatrix}$$

B – Réflexion et transmission par une lame diélectrique

1) En sortie, une onde progressive émerge dans l'air ($n = 1$) : $E(a,t) / B(a,t) = c$ (continuité des composantes tangentielles)

D'où en entrée : $\frac{E(0,t)}{B(0,t)} = \frac{T_{11}^{-1} E(a,t) + T_{12}^{-1} B(a,t)}{T_{21}^{-1} E(a,t) + T_{22}^{-1} B(a,t)} \Rightarrow \frac{E(0,t)}{B(0,t)} = c \frac{\cos(ka) + i \sin(ka) / n}{i \sin(ka) n + \cos(ka)}$ avec $k = nk_0$

Or à l'interface avec l'air, en utilisant la continuité des composantes tangentielles : $\begin{cases} E(0,t) = (E_{i0} + E_{r0}) e^{i\omega t} \\ B(0,t) = (E_{i0} - E_{r0}) e^{i\omega t} / c \end{cases}$

D'où, à partir du rapport de ces deux expressions : $\frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{i \sin(ka)(1 - n^2)}{2n \cos(ka) + i \sin(ka)(1 + n^2)}$

2) a) $n = 1 \Rightarrow E_{r0} / E_{i0} = 1$ L'onde se comporte bien comme en l'absence de lame, il n'y a pas de réflexion.

b) Dans l'air, le vecteur de Poynting moyen d'une onde plane progressive vaut : $\langle \vec{\Pi} \rangle = |E|^2 / 2\mu_0 c \vec{u}$.

À l'incidence : $\langle \vec{\Pi}_i \rangle = E_{i0}^2 / 2\mu_0 c \vec{e}_z$.

À la réflexion : $\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -|E_{r0}|^2 / 2\mu_0 c \vec{e}_z = -\frac{E_{i0}^2}{2\mu_0 c} \frac{\sin^2(ka)(1 - n^2)^2}{4n^2 \cos^2(ka) + \sin^2(ka)(1 + n^2)^2} \vec{e}_z$.

À la transmission : $\langle \vec{\Pi}_t \rangle = |E_{t0}|^2 / 2\mu_0 c \vec{e}_z = \frac{E_{i0}^2}{2\mu_0 c} \frac{4n^2}{4n^2 \cos^2(ka) + \sin^2(ka)(1 + n^2)^2} \vec{e}_z$.

Finalement, on obtient le bilan traduisant usuellement la conservation de l'énergie : $|\langle \Pi_i \rangle| = |\langle \Pi_r \rangle| + |\langle \Pi_t \rangle|$

Toutefois, cette approche est critiquable, car il faudrait justifier que les ondes incidente et réfléchie n'interfèrent pas. Il est plus satisfaisant de comparer les vecteurs de Poynting globaux en $z = 0$ et $z = a$.

$$\langle \vec{\Pi}(z=0) \rangle = \text{Re}[E(0,t)B^*(0,t)] / 2\mu_0 \vec{e}_z = |E(0,t)|^2 \text{Re} \left[\frac{i \sin(ka)n + \cos(ka)}{\cos(ka) + i \sin(ka)/n} \right] / 2\mu_0 c \vec{e}_z$$

$$\langle \vec{\Pi}(z=a) \rangle = \text{Re}[E(a,t)B^*(a,t)] / 2\mu_0 \vec{e}_z = |E(a,t)|^2 / 2\mu_0 c \vec{e}_z = |E(0,t)|^2 |\cos(ka) + i \sin(ka)/n|^{-2} / 2\mu_0 c \vec{e}_z$$

D'où : $\langle \vec{\Pi}(z=0) \rangle = \langle \vec{\Pi}(z=a) \rangle$. La puissance en entrée de la lame non absorbante se retrouve bien à la sortie.

c) $\varphi = \arg(E_{t0} / E_{i0}) = \frac{\omega a}{c} - \text{Arc tan} \left[\frac{1+n^2}{2n} \tan(ka) \right]$. En l'absence de lame, $n=1$, on a bien $\varphi=0$.

d) Si n est voisin de 1, on a au premier ordre $\frac{1+n^2}{2n} \approx 1$ d'où $\varphi \approx \frac{\omega a}{c}(1-n) = 2\pi\delta/\lambda$ avec $\delta = a(1-n)$.

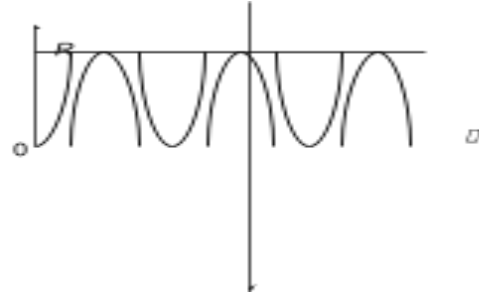
On retrouve la différence de marche utilisée en optique, qui néglige le rôle joué par la deuxième interface.

e) si $ka \ll 1$, $\tan(ka) \approx ka$ et $ka(1+n^2)/2n \ll 1$. D'où : $\varphi \approx \frac{\omega a}{c} \frac{(1-n^2)}{2}$

3) $R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{|\langle \Pi_r \rangle|}{|\langle \Pi_i \rangle|} = \frac{(1-n^2) \sin^2(ka)}{4n^2 + (1-n^2)^2 \sin^2(ka)}$

Or : $(1-n^2)^2 = 0,476$; $4n^2 = 6,76$ et $(1+n^2)^2 = 7,24$.

D'où : $R \approx \left(\frac{1-n^2}{2n} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{n\omega a}{c} \right)$



4) Le reflet de couleur verte est obtenu si le coefficient de réflexion R est maximal à $\lambda = 540 \text{ nm}$: $\lambda_{\text{vert}} = \frac{2na}{q+1/2}$ q entier.

Et la couleur est franche si R est le plus faible possible dans le reste du domaine optique (400 nm, 700nm).

- Pour $q=0$, $a=104 \text{ nm}$. Et R est minimal pour $\lambda=270 \text{ nm}$ et de très grandes valeurs.
- Pour $q=1$, $a=311 \text{ nm}$. Et R est minimal pour $\lambda=405 \text{ nm}$ et $\lambda=810 \text{ nm}$.
- Pour $q=2$, $a=519 \text{ nm}$. Et R est minimal pour $\lambda=450 \text{ nm}$ et $\lambda=675 \text{ nm}$.

Les deux premières possibilités laissent passer plus de longueurs d'onde visibles, la troisième semble optimale.

5) a) En sortie, l'indice $n=1$ doit être remplacé par n_0 . Les résultats du B)1) se réécrivent alors :

$$\frac{E(a,t)}{B(a,t)} = \frac{c}{n_0} \quad \frac{E(0,t)}{B(0,t)} = c \frac{\cos(ka)/n_0 + i \sin(ka)/n}{i \sin(ka)n/n_0 + \cos(ka)} \quad \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{n \cos(ka)(1/n_0 - 1) + (i \sin(ka)(1 - n^2/n_0))}{n \cos(ka)(1 + 1/n_0) + i \sin(ka)(1 + n^2/n_0)}$$

La couche est alors anti-reflet si $E_{r0} = 0$. Ceci implique deux conditions, n_0 étant imposé :

$$n = \sqrt{n_0} \quad \text{et} \quad \cos(ka) = 0 \Rightarrow a = \frac{(2p+1)\lambda}{4n} \quad \text{avec } p \text{ entier.}$$

b) Plusieurs valeurs de p conviennent pour satisfaire le critère imposé par l'énoncé :

- Pour $p=0$, $a=102 \text{ nm}$. Et $E_{r0} = 0$ également pour $\lambda=167 \text{ nm}$.
- Pour $p=1$, $a=306 \text{ nm}$. Et $E_{r0} = 0$ également pour $\lambda=300 \text{ nm}$ et $\lambda=1500 \text{ nm}$.
- Pour $p=2$, $a=510 \text{ nm}$. Et $E_{r0} = 0$ également pour $\lambda=357 \text{ nm}$ et $\lambda=833 \text{ nm}$.

Mais la première semble la plus efficace si on désire avoir un anti-reflet pour la plus grande partie possible du visible

C – Miroir de Bragg

- 1) Les champs étant tangentiels aux interfaces, ils sont continus (absence de courants surfaciques), d'où : $[T_{HL}] = [T_L][T_H]$.

$$[T_{HL}] = \begin{bmatrix} \cos \Phi_2 \cos \Phi_1 - \frac{n_1}{n_2} \sin \Phi_2 \sin \Phi_1 & -ic \left(\frac{\cos \Phi_2 \sin \Phi_1}{n_1} + \frac{\cos \Phi_1 \sin \Phi_2}{n_2} \right) \\ -i \left(\frac{n_1 \cos \Phi_2 \sin \Phi_1}{c} + \frac{n_2 \cos \Phi_1 \sin \Phi_2}{c} \right) & \cos \Phi_2 \cos \Phi_1 - \frac{n_2}{n_1} \sin \Phi_2 \sin \Phi_1 \end{bmatrix}$$

On peut vérifier que son déterminant est égal à 1, ce qui est compatible avec le produit unitaire des valeurs propres.

$$[T_{HL}]^N = [P]^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1^N & 0 \\ 0 & \alpha_2^N \end{bmatrix} [P]$$

- 2) $[T_{HL}]$ étant diagonalisable, on peut écrire en utilisant les matrices de passage :

Si N tend vers l'infini, la non divergence des champs à la traversée de ces couches impose : $|\alpha| \leq 1$. Or $\alpha_1 \alpha_2 = 1$, donc la seule possibilité correspond à deux valeurs propres conjuguées de norme 1. Finalement, la traversée de cette couche infinie impose un discriminant négatif à l'équation aux valeurs propres : $A^2 < 1$. A étant une fonction périodique de ω , il peut exister des plages de pulsation interdites. Dans le cas particulier proposé :

$$A = 1 - \frac{4,5}{2} \sin^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) < 1 \quad \sin^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) > \frac{4}{4,5}$$

. Donc les bandes interdites sont définies par $A < -1$, soit :

Une pulsation dans cette plage ne peut être transmise, elle est intégralement réfléchi (lames non absorbantes) : $R = 1$.

- 3) a) Si l'énergie est intégralement transmise, rien n'est réfléchi : $R = 1$. Alors, en entrée comme en sortie, il n'y a qu'une onde plane progressive. Le milieu étant d'indice $n = 1$ de part et d'autre : $E/B = c$ en entrée et en sortie.

- b) Le rapport des champs étant inchangé après la traversée, d'après l'expression de $[T_{HL}]^N$ il faut : $|\alpha_1| = |\alpha_2| = 1$

$$\sin^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) < \frac{4}{4,5}$$

- c) Cette condition est réalisée si $A^2 < 1$. D'où, d'après les résultats précédents :

- Deuxième partie -

Origine microscopique des ondes réfléchi et transmise

A – Champ rayonné par une nappe plane de courants surfaciques

- 1) a) Les plans étant supposés infinis, il y a invariance par translation selon x et y .
b) Dans le vide se propagent deux ondes planes progressives vers les z positifs et négatifs.

c) Vers les z positifs : $\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c}$ et vers les z négatifs : $\vec{B} = \frac{-\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c}$.

- 2) Vers les z positifs, la dépendance spatio-temporelle de l'onde plane étant en $(t - z/c)$: $\vec{B}(z, t) = \vec{B}(0^+, t - z/c)$.

Vers les z négatifs, la dépendance spatio-temporelle de l'onde plane étant en $(t + z/c)$: $\vec{B}(z, t) = \vec{B}(0^+, t + z/c)$.

- 3) Les plans $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ étant respectivement des plans de symétrie et d'antisymétrie pour les courants :
 $\vec{E} = E(z, t) \vec{e}_x$ et $\vec{B} = B(z, t) \vec{e}_y$

Le plan des courants étant un plan de symétrie pour eux : $E(z)$ est pair et $B(z)$ est impair.

- 4) Le champ électrique étant tangentiel, il est continu : $\vec{E}(0^+, t) = \vec{E}(0^-, t)$.

La présence du courant surfacique implique une discontinuité du champ magnétique : $\vec{B}(0^+, t) = \vec{B}(0^-, t) - \mu_0 J_s \vec{e}_y$.

Finalement, en utilisant la parité du champ magnétique : $\vec{B}(0^+, t) = -\vec{B}(0^-, t) = -\mu_0 J_s / 2 \vec{e}_y$.

$$\begin{aligned}\vec{B}(z > 0, t) &= -\frac{\mu_0}{2} J_s \left(t - \frac{z}{c}\right) \vec{e}_y & \vec{B}(z < 0, t) &= \frac{\mu_0}{2} J_s \left(t + \frac{z}{c}\right) \vec{e}_y \\ \vec{E}(z > 0, t) &= -\frac{\mu_0 c}{2} J_s \left(t - \frac{z}{c}\right) \vec{e}_x & \vec{E}(z < 0, t) &= -\frac{\mu_0 c}{2} J_s \left(t + \frac{z}{c}\right) \vec{e}_x\end{aligned}$$

B – Réflexion par un plan parfaitement conducteur sous incidence normale

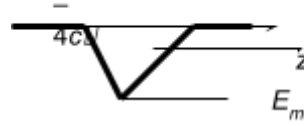
1) Au sein d'un métal parfait, le champ électrique est nul. Donc : $\vec{E}_+(z, t) = -\vec{E}_i(z, t) = -f(t - z/c) \vec{e}_x$

D'après ce qui a été fait au A) on en déduit : $\vec{J}_s(t) = \frac{2f(t)}{\mu_0 c} \vec{e}_x$ et $\vec{E}_-(z, t) = -f(t + z/c) \vec{e}_x$

2) $r_E = E_-(0, t) / E_i(0, t) = -1$

3) $E_-(z, 4\tau) = -f(4\tau + z/c) = -f\left(\frac{z + 4c\tau}{c}\right)$

Il s'agit de l'opposée de $f(u)$, translatée de $-4c\tau$, dilatée de c .



4) a) $\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) S dt = \frac{S}{\mu_0 c} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t)^2 dt \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{S E_m^2 \tau}{\mu_0 c}$ et $q = \frac{S E_m^2 \tau}{\mu_0 c^2}$

b) La réflexion d'un photon sur la surface métallique parfaite se traduit par un transfert de quantité de mouvement à la paroi du double de sa quantité de mouvement initiale. La force moyenne ainsi exercée sur la paroi correspond au taux de transfert moyen de quantité de mouvement à la paroi par unité de temps :

$$\langle F \rangle = PS = 2q / 3\tau \Rightarrow P = 2E_m^2 / 3\mu_0 c^2$$

C – Rayonnement d'un plan de dipôles

1) a) Le moment dipolaire volumique vaut : $\vec{P} = \frac{Q^+ \vec{OG}_+ + Q^- \vec{OG}_-}{V} = \frac{Q^+ \vec{G}_- \vec{G}_+}{V} \Rightarrow \vec{P} = \rho_- \vec{d}$

b) $\vec{J}_{pol} = \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_- = \rho_- \frac{d}{dt} \vec{G}_+ \vec{G}_- \Rightarrow \vec{J}_{pol} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

2) a) Une lame de faible épaisseur a parcourue par un courant volumique peut être modélisée par : $\vec{J}_{s pol} = a \vec{J}_{pol}$.

Or la polarisation vaut : $\vec{P} = Np(t) \vec{e}_x$. Finalement : $\vec{J}_{s pol} = aN \frac{dp}{dt} \vec{e}_x$

b) $\vec{E}_+(z, t) = -\frac{\mu_0 caN}{2} \frac{dp}{dt} \left(t - \frac{z}{c}\right) \vec{e}_x$ $\vec{E}_-(z, t) = -\frac{\mu_0 caN}{2} \frac{dp}{dt} \left(t + \frac{z}{c}\right) \vec{e}_x$

c) $\vec{p}(t) = \alpha \vec{E}_i(0, t) = \alpha E_{i0} e^{i\omega t} \vec{e}_x \Rightarrow \vec{E}_-(z, t) = -\frac{\mu_0 caN}{2} \alpha i\omega E_{i0} e^{i(\omega t + \omega z/c)} \vec{e}_x$

D – Paradoxe d'Ewald

1) a) L'approximation $a \ll \lambda$ permet de que considérer les dipôles induits par le champ électrique évoluent en phase.

b) $\vec{E}_{tot}(z > a, t) = \vec{E}_i(z, t) + \vec{E}_+(z, t) = E_{i0} \left(1 - i\omega \frac{\alpha \mu_0 caN}{2}\right) e^{i\omega(t - z/c)} \vec{e}_x$

c) Avec la polarisation $\vec{P} = N\alpha \vec{E}$, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = (\epsilon_0 + N\alpha) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \Rightarrow \epsilon_r = 1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_0}$ et $n \approx 1 + \frac{N\alpha}{2\epsilon_0}$

d) $\vec{E}_{tot}(z > a, t) = E_{i0} (1 - i\omega\epsilon_0\mu_0 ca(n-1)) e^{i\omega(t-z/c)} \vec{e}_x = \vec{E}_i \left[1 - i\frac{\omega}{c} a(n-1) \right]$

Or, $a \ll \lambda$ permet d'écrire : $\frac{\omega}{c} a(n-1) \ll 1$ et $1 - i\frac{\omega}{c} a(n-1) \approx \exp\left[-i\frac{\omega}{c} a(n-1)\right]$. L'expression précédente peut donc s'interpréter comme un déphasage de l'onde incidente pour une différence de marche : $\delta = a(n-1)$

e) Et : $\vec{E}_-(z, t) = E_{i0} \left(-i\frac{\omega}{c} a(n-1)\right) e^{i\omega(t+z/c)} \vec{e}_x$ Or au Or au I)B)1) on avait : $\frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{i \sin(ka)(1-n^2)}{2n \cos(ka) + i \sin(ka)(1+n^2)}$

En utilisant $n \approx 1$ et $a \ll \lambda$ ($ka \ll 1$) : $E_{r0} \approx E_{i0} i n k_0 a \frac{2(1-n)}{2n} = -i\frac{\omega}{c} a(n-1) E_{i0}$. On retrouve le résultat attendu !

2) a) Il s'agit de la somme du champ incident et de ceux émis par les différentes couches élémentaires de dipôles, de largeur dz entre $z = 0$ et $z = +\infty$. Le champ présent en $z = u$ est : $\vec{E}(u, t)$. La couche élémentaire entre u et $u + du$ réémet :

$$\vec{dE}_+(z > u, t) = -i\frac{\omega}{c} du(n-1) \vec{E}(u, t) e^{-i\omega(z-u)/c} \quad ; \quad \vec{dE}_-(z < u, t) = -i\frac{\omega}{c} du(n-1) \vec{E}(u, t) e^{i\omega(z-u)/c}$$

D'où : $\vec{E}(z, t) = \vec{E}_i + \int_0^z \vec{dE}_+ + \int_z^\infty \vec{dE}_- = \vec{E}_i - \frac{i\omega(n-1)}{c} \int_0^\infty \vec{E}(u, t) e^{-i\omega|z-u|/c} du$ et $G(u) = -\frac{i\omega(n-1)}{c} e^{-i\omega|z-u|/c}$

b) $\vec{E}(z < 0, t) = \vec{E}_i - \frac{i\omega(n-1)}{c} \int_0^\infty [t_E \vec{E}_0 e^{i\omega t} e^{-ik_0 u}] e^{ik_0(z-u)} e^{-u/L} du$

Or $\int_0^\infty e^{-i(n+1)k_0 u} e^{-u/L} du = \frac{-1}{-i(n+1)k_0 - 1/L} \approx \frac{c}{i(n+1)\omega}$ car $\lambda \ll L$. D'où finalement :

$$\vec{E}(z < 0, t) = \vec{E}_i + \frac{(1-n)}{2} \vec{E}_0 e^{i(\omega t + k_0 z)}$$

qui redonne le coefficient de réflexion attendu au premier ordre pour $n \approx 1$!

FIN