

Лекція №1

Теорія кіл із розподіленими параметрами

Всі радіотехнічні системи поділяються на два великі класи: пристрої із зосередженими параметрами та пристрої з розподіленими параметрами. **Пристрої із зосередженими параметрами** задовольняють наступній умові: фізичні розміри пристрою набагато менші від робочої довжини хвилі цього пристрою $l \ll \lambda$. Для **пристроїв із розподіленими параметрами** виконується умова $l \geq \lambda$, тобто фізичні розміри більші або дорівнюють робочій довжині хвилі цього пристрою.

Раніше передбачалося що струм у всіх ділянках ланцюга, з'єднаних послідовно, має в різні моменти однакові значення, оскільки йшлося про ланцюги із зосередженими параметрами.

Враховуючи, що ЕМ коливання в будь-якій електричній системі поширюються з кінцевою швидкістю, миттєве значення струму в колі з кінцевими розмірами не може бути скрізь однаково! Однак наближенням, коли $i = \text{const}$ є ланцюги з малими (відносно довжини хвилі) розмірами, тобто ланцюги із зосередженими параметрами, що розглядалися раніше.

В даний час в радіотехніці широко використовують ланцюги, геометричні розміри яких не можна вважати малими (ЛЕП, антенні системи та інше). Для таких систем в загальному випадку потрібно застосовувати методи розрахунків з теорії електромагнітного поля. Але! У деяких випадках все ж таки вдається застосовувати рівняння теорії електричних кіл.

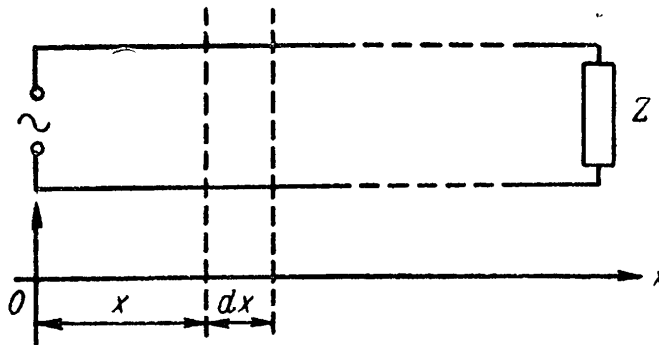


Рисунок 1

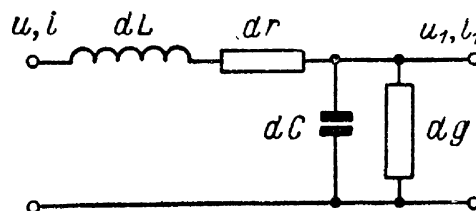


Рисунок 2

Тобто пристрій із розподіленими параметрами можна розглядати як сукупність маленьких елементів (пристроїв із зосередженими параметрами, які містять опір, індуктивність та ємність, рис. 1, рис. 2). Еквівалентна схема лінії кінцевої довжини повинна містити безліч таких ланок, з'єднаних послідовно.

Часто замість нескінченно малих dL , dC , dr , dg використовують так звані **погонні параметри лінії**, що розраховуються на одиницю довжини

$$L_1 = \frac{dL}{dx} \quad \text{погонна індуктивність}, \quad C_1 = \frac{dC}{dx} \quad \text{погонна ємність}, \quad r_1 = \frac{dr}{dx} \quad \text{погонний опір}, \quad g_1 = \frac{dg}{dx} \quad \text{погонна провідність}.$$

Довгу лінію вважають однорідною, якщо активний опір, індуктивність, провідність і ємність рівномірно розподілені вздовж лінії.

Диференціальні рівняння напруги та струму у довгій лінії. Телеграфні рівняння

Наведені вище роздуми дозволяють стверджувати, що напруга та струм у довгій лінії в загальному випадку є функціями часу та просторової координати, яка визначає положення точки спостереження.

Щоб знайти напругу та струм в будь-якій точці довгої лінії, роздивимося довільний нескінченно малий елемент dx , віддалений від її початку на відстань x (рис. 1).

Позначимо шукані величини на вході елемента, тобто в точці з координатою x , через u та i . Тоді значення u_1 та i_1 на виході елементі (в точці $x + dx$) будуть

$$u_1 = f(x + dx, t),$$

$$i_1 = \varphi(x + dx, t).$$

Положимо, що напруга та струм в лінії є безперервними функціями координати x , значення u_1 та i_1 представимо у вигляді ступенних рядів:

$$u_1 = f(x, t) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dx + \dots = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \dots,$$

$$i_1 = \varphi(x, t) + \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} dx + \dots = i + \frac{\partial i}{\partial x} dx + \dots.$$

Обмежившись двома першими членами розкладань, отримаємо

$$u_1 - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

$$i_1 - i = \frac{\partial i}{\partial x} dx.$$

(1)

Початкове припущення про безперервність функцій струму та напруги буде, вочевидь, справедливе для будь-якої лінії, погонні параметри якої не змінюються за довжиною стрибком.

Роздивимося еквівалентну схему елемента dx (рис. 2). Вочевидь, різниця між величинами u_1 та u обумовлена падінням напруги на активному опорі $dr = r_1 dx$ та індуктивності $dL = L_1 dx$, з'єднаних послідовно, тобто

$$u - u_1 = i \cdot r_1 dx + L_1 \frac{\partial i}{\partial t} dx.$$

Аналогічно струм i_1 відрізняється від струму i внаслідок того, що частина його відгалужується в ємність $C \cdot dx$ та активну провідність $dg = g_1 dx$, з'єднаних паралельно. Тобто

$$C \cdot i_1 = dx \cdot g_1 dx + \frac{\partial u_1}{\partial t}.$$

В правій частині останньої рівності величину u_1 з точністю до нескінченно малих другого порядку можна замінити величиною u . Фізично така заміна означає, що на еквівалентній схемі елемента dx точку включення паралельної ланки між верхнім та нижнім проводами можна обирати довільно, таким чином

$$C \cdot i_1 = dx \cdot g_1 dx + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Підставимо знайдені різниці напруг та струмів в початкові рівності (1), можна записати:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Диференціальні рівняння (2), які визначають струм та напругу в лінії, називаються телеграфними рівняннями.

Тепер треба розв'язати ці рівняння.

Але! Вирішення цих рівнянь не таке просте! Тому ми підемо наступним шляхом – шляхом справжніх дослідників! Тобто для розгляду фізичних сутностей даних рівнянь їх вирішують у деяких наближеннях, які можуть не мати місця на практиці! Таким прийомом іноді користуються, а потім, коли фізика ясна у найпростішому випадку – ускладнюють та вирішують далі.

Розв'язання телеграфних рівнянь для ліній без втрат

Знайдемо рішення телеграфних рівнянь (2) для лінії без втрат, тобто вважаємо, що $r_1 = 0$, $g_1 = 0$, тобто в довгій лінії немає втрат у дротах $r_1 = 0$ і немає витоків через недосконалість ізоляції $g_1 = 0$. Система (2) прийме вигляд

$$\begin{cases} +\frac{\partial u}{\partial x} = -L_1 \frac{\partial i}{\partial t} \\ +\frac{\partial i}{\partial x} = -C_1 \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad (0)$$

Продиференціюємо перше рівняння по x

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} \quad (1)$$

Щоб знайти праву частину цього рівняння, продиференціюємо друге рівняння по t , тобто:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = -C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

Підставимо (2) в (1), знайдемо, що функція U задовольняє рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -L_1 \left(-C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = L_1 C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Або, якщо введемо позначення $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ (швидкість), отримаємо, що $L_1 C_1 = \left(\sqrt{L_1 C_1} \right)^2 = \frac{1}{\vartheta^2}$, тобто

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\vartheta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \quad (3)$$

Аналогічно можна показати, що

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{\vartheta^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} , \quad (3.a)$$