I.2. MATRICES.

1. Introducción.
2. Concepto de matriz.
3. Igualdad de matrices.
4. Tipos de matrices.
5. El espacio vectorial de las matrices de orden mxn.
   A. Suma de matrices.
   B. Propiedades de (M_{mxn}, +).
   C. Producto de un numero real por una matriz.
   D. Propiedades de (M_{mxn}, ☁$_{\lambda}$).
6. Producto de matrices.
   A. Producto de una matriz fila por una matriz columna.
   B. Producto de dos matrices cualesquiera.
   C. Propiedades del producto de matrices.
7. Tipos de matrices cuadradas.
8. Matriz traspuesta. Propiedades.
9. Matrices invertibles. Propiedades.
10. Operaciones con matrices y propiedades. Resumen.
11. Representación de un vector por una matriz.
12. Representación de un conjunto de vectores por una matriz.
13. Rango de una matriz.
14. Matriz asociada a una aplicación lineal.
15. Aplicaciones lineales y operaciones con matrices.
    A. Matriz asociada a la composición de aplicaciones lineales.
16. Ejercicios.
17. Problemas.
18. Ejercicios propuestos en selectividad.

1. INTRODUCCIÓN.

Las matrices aparecieron por primera vez hacia el año 1850, introducidas por el inglés J. J. Sylvester. Su desarrollo se debe a W. R. Hamilton y a A. Cayley.

Además de su utilidad para el estudio de los sistemas de ecuaciones, las matrices aparecen de manera natural en geometría, estadística, economía, etc.

Nuestra cultura está llena de matrices de números: El horario de los trenes de cada una de las estaciones es una matriz de doble entrada, la tabla de cotizaciones de la Bolsa en cada uno de los días de la semana es otra, etc.

Las tablas de sumar y multiplicar, la disposición de los alumnos en clase, las casillas de un tablero de ajedrez, las apuestas de la loto, los puntos de un monitor de ordenador, son otros tantos ejemplos de la vida cotidiana de matrices.

Actualmente, muchos programas de ordenador utilizan el concepto de matriz. Así, las Hojas de Cálculo funcionan utilizando una inmensa matriz con cientos de filas y columnas en cuyas celdas se pueden introducir datos y fórmulas para realizar cálculos a gran velocidad. Esto requiere utilizar las operaciones con matrices.

2. CONCEPTO DE MATRIZ.

1) Se llama **matriz** de orden mxn, sobre el cuerpo de los numeros reales a una "caja", "cuadro", etc. que contiene mxn números reales dispuestos en m filas y n columnas.

* A los números reales a_{ij} se les llama elemen tos de la matriz.

* El primer subíndice (i) indica la fila, el segundo (j) la columna. Así, el elemento a_{32} es el que está en la tercera fila y la segunda columna.

* Las dimensiones de la matriz son m y n.

2) Formalmente podemos definir una matriz de la siguiente manera:

Sean $I=\{1,2,...,m\}$, $J=\{1,2,...,n\}$ dos conjuntos finitos de índices.

Se llama **matriz** de orden mxn, sobre el cuerpo de los numeros reales a toda aplicación:

$$a: I\times J \longrightarrow R$$
$$(i,j) \longrightarrow a(i,j)=a_{ij}$$

que asocia a cada par (i,j) el número real a(i,j) que representamos por a_{ij}.

Denotaremos por M_{mxn} al conjunto de las matrices de orden mxn.

● Es una matriz de orden 3x4 (3 filas, 4 columnas), $a_{23}= 1$, $a_{32}=8$, $a_{34}=0$. etc.

3. IGUALDAD DE MATRICES.

Dos matrices A y B son iguales si tienen el mismo orden y coinciden los elementos que ocupan el mismo lugar. Es decir, siendo:

A=B si para todo i $\in$ {1,2,...,m} y para todo j $\in$ {1,2,...,n} se cumple que $a_{ij}=b_{ij}$.

4. TIPOS DE MATRICES.

a. **Matriz fila.** Es toda matriz de orden 1xn.

- . A es de orden 1x5.

b. **Matriz columna.** Es toda matriz de orden mx1.

- . A es de orden 3x1.

c. **Matriz nula.** Es la que tiene todos sus elementos nulos. La denotaremos por **(0)**.

- Son matrices nulas: , , ...

d. **Matriz vertical.** Es aquella en la que m>n.

- .

e. **Matriz horizontal.** Es aquella en la que m<n.

- .

f. **Matriz opuesta de A.** Es la que tiene por elementos los opuestos de los elementos de A. La denotaremos por -A. Si $A=(a_{ij})$, $-A=(-a_{ij})$.

- Si .

g. **Matriz traspuesta de A.** Es la que se obtiene a partir de A cambiando filas por columnas sin alterar su orden de colocación. La denotaremos por A^t.
Si $A=(a_{ij})$, $A^t=(a_{ji})$. Si A es de orden mxn, A^t será de orden nxm.

- Si . A es de orden 2x3. A^t es de orden 3x2.

h. **Matriz cuadrada.** Es toda matriz que tiene el mismo número de filas que columnas. Es decir m=n. En ellas podemos distinguir:
- La **diagonal principal**. Son los elementos a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}.
- La **diagonal secundaria**. Son los elementos a_{1n}, $a_{2(n-1)}$, ..., a_{n1}.

- . Diagonal principal: 1,5,9. Diagonal secundaria: 3,5,7.

i. **Submatriz de una matriz A.** Es toda matriz A' obtenida suprimiendo p filas y q columnas en A. Si A es de orden mxn, A' será de orden (m-p)x(n-q).

- . Suprimiendo en $A \in M_{3x5}$ la fila 3 y las columnas 4 y 5, obtenemos , submatriz $A' \in M_{2x3}$.

Ejercicios.

1. Indica de qué tipo es cada una de las siguientes matrices:
, , . Obtén: A^t, B^t, C^t, -A, -B y -C.
Solución.
2.

i. **Matriz escalonada.** Es toda matriz en la que el número de ceros que precede al primer elemento no nulo, de cada fila o de cada columna, es mayor que el de la precedente. Puede ser escalonada por filas o escalonada por columnas.
Escalonadas por filas. En ellas:

$a_{11} \neq 0$.
$a_{i1}=0$ para $i=2,3,...,m$.
$a_{i2}=0$ para $i=3,4,...,m$.
....
$a_{im}=0$ para $i=m+1,...,m$.

● .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Escalonadas por columnas. En ellas:
$a_{11} \neq 0$.
$a_{1i}=0$ para $i=2,3,...,n$.
$a_{2i}=0$ para $i=3,4,...,n$.
....
$a_{mi}=0$ para $i=m+1,...,n$.

● .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 9 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

5. <u>EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES DE ORDEN $m_x n$</u>.

A. <u>SUMA DE MATRICES</u>.

Consideremos dos matrices A, $B \in M_{mxn}$, es decir, con las mismas dimensiones.

Definimos:

En forma abreviada: si $\mathbf{A=(a_{ij})}$, $\mathbf{B=(b_{ij})}$ entonces $\mathbf{A+B=(a_{ij}+b_{ij})}$.

Es decir: suma de matrices de las mismas dimensiones, es la aplicación que asocia a cada par de matrices otra matriz de las mismas dimensiones cuyos elementos se obtienen sumando término a término los elementos correspondientes en dichas matrices:

$$+: M_{mxn} x M_{mxn} \longrightarrow M_{mxn}$$
$$(A,B) \longrightarrow A+B$$

- Siendo y entonces .

B. <u>PROPIEDADES DE</u> $(M_{mxn}, +)$.

1. <u>Asociativa</u>: (A+B)+C = A+(B+C). Es evidente, pues los elementos de A, B y C son de R que es un cuerpo conmutativo.
2. <u>Existe elemento neutro</u>: A+Neutro=A $\Rightarrow$ Neutro=(0)=La matriz nula.
3. <u>Existe elemento opuesto</u>: A+(Opuesto de A)=(0) $\Rightarrow$ Opuesto de A=-A
4. <u>Conmutativa</u>: A+B = B+A. Es evidente, pues los elementos de A y B son de R que es un cuerpo conmutativo.

Por tanto $(M_{mxn}, +)$ es un Grupo Conmutativo.

C. <u>PRODUCTO DE UN NUMERO REAL POR UNA MATRIZ</u>.

Consideremos la matriz $A \in M_{mxn}$ y $\lambda \in R$.

Definimos:

En forma abreviada: si $A=(a_{ij})$, $\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})$.

Es decir: producto de un número real por una matriz, es la aplicación que asocia a cada par formado por un número real y una matriz, otra matriz cuyos elementos se obtienen multiplicando el número real por todos los elementos de la matriz:

$$\cdot_\lambda: R x M_{mxn} \longrightarrow M_{mxn}$$
$$(\lambda, A) \longrightarrow \lambda \cdot A$$

- Siendo entonces .

D. <u>PROPIEDADES DE</u> $(M_{mxn}, \cdot_\lambda)$.

5. $\lambda \cdot (A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
6. $(\lambda+\mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$
7. $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$
8. $1 \cdot A = A$

Son evidentes, pues tanto los elementos de las matrices A y B como los números λ y μ pertenecen a R que es un cuerpo conmutativo. Así pues:

$(M_{mxn}, +, \cdot_{\lambda})$ es un R-espacio vectorial de dimensión $m{\times}n$

La base canónica de M_{mxn} está constituida por las matrices A_{ij} con todos los elementos nulos, excepto el situado en la fila i y la colunmna j que es igual a 1.

- La base canónica de $(M_{2x2}, +, \cdot_{\lambda})$ es: , , , .
  Las matrices A_{11}, A_{12}, A_{21} y A_{22} son linealmente independientes pues:
  $a\cdot + b\cdot + c\cdot + d\cdot =$ $\Rightarrow$ $a=b=c=d=0$
  Las matrices A_{11}, A_{12}, A_{21} y A_{22} son un sistema de generadores de M_{2x2} pues:
  $= a\cdot + b\cdot + c\cdot + d\cdot$.

Ejercicios.

1. Siendo y calcula: 3A+2B.
   Solución. .
2. Calcula las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema:
   $3A + 2B =$ $2A + B =$
   Solución. , .
3. Obtén las matrices A y B que verifiquen el sistema:
   $2\cdot A + B =$ $A - 3\cdot B =$
   Solución. , .
4. Obtén las matrices A y B que verifiquen el sistema:
   $A + B =$ $2\cdot A + 3\cdot B =$
   Solución.
5. Prueba que el conjunto de las matrices 2x3 es un R-espacio vectorial de dimensión 6.
   Solución.
6. Demuestra que el conjunto S de las matrices de la forma forman un subespacio vectorial de M_{2x2} y escribe una base del mismo. Demuestra también que forman un cuerpo isomorfo al de los números complejos.
   Solución.
7. Demuestra que el conjunto T de las matrices de la forma forman un subespacio vectorial de M_{3x3} y escribe una base del mismo.
   Solución.

6. PRODUCTO DE MATRICES.

A. PRODUCTO DE UNA MATRIZ FILA POR UNA MATRIZ COLUMNA.

Sean A una matriz con una fila y n columnas y B una matriz con n filas y una columna.

El producto de las matrices A y B **$(A\cdot B)$** es otra matriz con una fila y una columna cuyo único elemento es: $c = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + ... + a_n\cdot b_n$. Es decir: $A\cdot B=(c)=$.

Hay que hacer notar que para poder multiplicar A y B debe suceder que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B.

- Sean una matriz con una fila y 4 columnas y una matriz con 4 filas y una columna.
  $A\cdot B = [2\cdot 6 + (3)\cdot 7 + 4\cdot(8) + 5\cdot 9] = (4)$ que es una matriz de orden 1x1 con un único elemento, el 4.

B. PRODUCTO DE DOS MATRICES CUALESQUIERA.

Sean A una matriz de orden **mxn**, formada por m matrices fila $[A_1, A_2, ..., A_m]$ de n elementos cada una y B una matriz de orden **nxp**, formada por p matrices columna $[B_1, B_2, ..., B_p]$ de n elementos cada una.

El producto de las matrices A y B **(A·B)** es otra matriz C de orden **mxp** con m filas y p columnas, cuyo elemento c_{ij} es el producto de la matriz fila A_i por la matriz columna B_j.

Es decir: $c_{ij} = A_i \cdot B_j = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{in} \cdot b_{nj} =$.

Así pues, el producto de matrices, es la aplicación que asocia a cada par de matrices, una de dimensión mxn y otra de dimensión nxp, una tercera matriz de dimensión mxp:

$$\cdot : M_{mxn} x M_{nxp} \longrightarrow M_{mxp}$$
$$(A \ , \ B) \longrightarrow C$$

tal que el elemento que ocupa el lugar q,r de la matriz producto se obtiene sumando los productos que resultan de multiplicar los elementos de la fila q-ésima de la matriz A por los respectivos elementos de la columna r-ésima de la matriz B.

Simbólicamente: si $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ y $C=(c_{ij})$ entonces: .

Obsérvese que para poder efectuar el producto A·B es necesario que el número de columnas de la matriz A coincida con el número de filas de la matriz B. Esto implica que, en general, si existe el producto A·B no tiene por qué existir B·A. Sin embargo, si las matrices son cuadradas y del mismo orden, siempre existen A·B y B·A.

- = = .

- Los consumos anuales de cuatro familias **a**, **b**, **c** y **d**, en **pan**, **carne** y **mantequilla** vienen dados en la matriz **A**. Los precios de esos mismos productos en los años **1990**, **91**, **92**, **93** y **94** vienen dados en la matriz **B**. La matriz **C=A·B** nos da el gasto total (en esos productos) de cada familia en cada año:

  Complétese la matriz C.

- **MODELO ECOLÓGICO DE THRALL**. En un cierto sistema ecológico dividimos las especies en tres categorías:
  1) **Plantas** (tomillo, romero, etc.) que suministran alimento a animales herbívoros. Las designamos por p_1, p_2, p_3, ...
  2) **Animales herbívoros** (conejo, liebre, etc.) que comen dichas plantas. Las designamos por a_1, a_2, a_3, ...
  3) **Animales carnívoros** (zorro, lobo, etc.) que se comen a los animales herbívoros. Las designamos por c_1, c_2, c_3, ...

  Se puede plantear la siguiente cuestión: **¿Qué cantidad de la planta p_i consume indirectamente el carnívoro c_j durante un cierto periodo de tiempo?**

  Podemos suponer conocidas las dos matrices siguientes:

  $A=(a_{ik})$ que representa las cantidades consumidas por el animal a_k de la planta p_i. $B=(b_{kj})$ que representa las cantidades devoradas por el carnívoro c_j del herbívoro a_k.

  El carnívoro c_1, al comer de a_1, consume indirectamente $a_{11} \cdot b_{11}$ de p_1, al comer de a_2 consume $a_{12} \cdot b_{21}$ de p_1 etc., luego en total consume $a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + ... + a_{1n} \cdot b_{n1}$, es decir el producto de la primera fila de A por la primera columna de B.

  Las cantidades pedidas son, pues, los elementos de la matriz A·B.

Ejercicios.

1. Dada una matriz A, ¿existe una matriz B, tal que el producto $A\cdot B$, o bien $B\cdot A$, sea una matriz de una sola fila? Pon un ejemplo con una matriz $A\varepsilon M_{3x4}$.
   Solución.
2. Calcula el producto $A\cdot B$ siendo: .
   Solución. $A\cdot B$ =
3. Dada la matriz: , calcula X^2 y X^3.
   Solución. ,

C. PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES.

1. No es una operación interna en el conjunto M_{mxn}. Si $m\neq n$ ni siquiera se puede efectuar el producto de dos matrices $A,B\in M_{mxn}$.
En el conjunto M_{nxn}, sí que sería una operación interna.

2. No es conmutativo.

a) Hay casos en los cuales es posible efectuar $A\cdot B$, y no $B\cdot A$.
   - Si y ⇒ . No es posible efectuar $B\cdot A$.

b) En los casos en que es posible efectuar $A\cdot B$ y $B\cdot A$, no siempre da el mismo resultado. A veces ni siquiera son del mismo orden.
   - Si y ⇒ , .

c) En el caso de las matrices cuadradas, tampoco se verifica la propiedad conmutativa.
   - Si y ⇒ , .

Ejercicios.

1. Si A y B son matrices cuadradas cualesquiera, ¿Será: $(A+B)^2=A^2+2\cdot A\cdot B+B^2$?
   Solución. No. $A\cdot B\neq B\cdot A$.
2.

3. Dota al conjunto M_{mxn} de divisores de cero. Es decir, hay matrices no nulas cuyo producto es la matriz nula.
- Si y ⇒ . $A\neq(0)$ y $B\neq(0)$; sin embargo $A\cdot B=(0)$.

4. Verifica la propiedad asociativa en los casos que se puedan multiplicar tres matrices. Es decir, si A es de orden mxn, B de orden nxp y C de orden pxq, entonces:

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C).$$

Dem. Sean a_{ij}, b_{ij} y c_{ij} los elementos generales de A, B y C respectivamente.
El elemento general de $A\cdot B$ será: α_{is} = .
El de $(A\cdot B)\cdot C$ será: x_{ij} = = = .
El elemento general de $B\cdot C$ será: β_{rj} = .
El de $A\cdot(B\cdot C)$ será: y_{ij} = = = .
Es decir, $x_{ij} = y_{ij}$ y por tanto $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$. c.q.d.
●

5. No existe elemento neutro. Si A es de orden mxn, entonces $\mathbf{I_m}$ es el elemento neutro por la izquierda de A, e $\mathbf{I_n}$ el elemento neutro por la derecha de A. Es decir: $I_m\cdot A=A$, $A\cdot I_n=A$.
- = . =

Si A es una matriz cuadrada de orden n, I_n es el elemento neutro por la izquierda y por la derecha de A. Es decir, el único elemento neutro de M_{nxn}. O sea: $I_n\cdot A=A\cdot I_n=A$.

6. No existe elemento simétrico para ninguna matriz de M_{mxn} siendo $m\neq n$. Hay matrices cuadradas que sí tienen elemento simétrico **(inversa)** las cuales se llaman **regulares**, en cambio las que no tienen inversa se llaman **singulares**. La matriz inversa de A la denotamos por A^{1}. Ya veremos cómo se calcula. Si A es de orden n, A^{1} también, y se verifica que: A

$^{1}\cdot A = A\cdot A^{1} = I_n$.

- = . = .
- Veamos que no tiene inversa. Si fuera su inversa:

  = $\Rightarrow$ a+c=1, b+d=0, a+c=0, b+d=1. Sistema de ecuaciones que no tiene solución y por tanto no existe B.

7. **$A\cdot(B+C) = A\cdot B+A\cdot C$**. Es evidente, con $A\in M_{mxn}$ y $B,C\in M_{nxp}$.

8. **$(A+B)\cdot C = A\cdot C+B\cdot C$**. Es evidente, con $A,B\in M_{mxn}$ y $C\in M_{nxp}$.

9. **$(\lambda\cdot A)\cdot B = \lambda\cdot(A\cdot B)$**. Es evidente, con $A\in M_{mxn}$ y $B\in M_{nxp}$.

<u>Ejercicios</u>.

1. Calcula A^n en cada uno de los siguientes casos.
   a) . b) . c) .
   <u>Solución</u>. a) . b) . c) .
2. Dada la matriz , calcula A^7.
   <u>Solución</u>. A^7 =
3. Calcula A^n en cada uno de los siguientes casos.
   a) . b) .
   <u>Solución</u>. a) A^n=. b) .
4. Halla todas las matrices $A\in M_{2x2}$ tales que $A^2=-I_2$.
   <u>Solución</u>. , .
5. Halla todas las matrices $A\in M_{2x2}$ tales que $A^2=(0)$.
   <u>Solución</u>. , , , , con $b\neq 0$.
6. Sabiendo que $A^2+A=I$, calcula, simplificada, la matriz $(A+I)^2-(A+I)$.
   <u>Solución</u>.
7. Siendo . Halla A^n, para $n\in N$.
   <u>Solución</u>. .
8. Siendo . Halla B^n, para $n\in N$.
   <u>Solución</u>. $B^n=3^{n\,1}\cdot B$.

7. TIPOS DE MATRICES CUADRADAS.

1. **Diagonales**. Son aquellas que tienen todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal, los cuales pueden ser nulos o no.
   - , , .

   a. **Escalares**. Son las diagonales con todos los elementos de la diagonal principal iguales.
      - , .

   b. **Unidad o identidad**. Es una diagonal escalar con el número 1 en todos los lugares de la diagonal principal. Se denota por I_n.
      - , .

2. **Triangulares**. Son aquellas en las que son nulos todos los elementos que están por encima o por debajo de la diagonal principal.

   a. **Triangular superior**. Si son nulos los elementos por debajo de la diagonal principal. Es decir: $a_{ij}=0$ para $i>j$.
      - , .

   b. **Triangular inferior**. Si son nulos los elementos por encima de la diagonal principal. Es decir: $a_{ij}=0$ para $i<j$.
      - , .

3. **Simétricas**. Son las matrices A tales que $A^t=A$. Es decir: $a_{ij}=a_{ji}$ para todos i, j.
   - .

   Ejercicios.

   1. Demuestra que las matrices simétricas $A\in M_{2x2}$ forman un subespacio vectorial de M_{2x2}. Obtén una base del subespacio.
      Solución.
   2. Si A y B son matrices simétricas de orden 2, determina la condición que debe cumplir la matriz $A\cdot B$ para que sea también simétrica.
      Solución. A conmute con B.
   3. Demuestra que para cualquier matriz cuadrada A, se verifica que $A+A^t$ es simétrica.
      Solución.
   4. Halla todas las matrices simétricas $A\in M_{2x2}$ tales que $A^2=I_2$.
      Solución.
   5.

4. **Antisimétricas**. Son las matrices A tales que $A^t=-A$. O sea: $a_{ij}=-a_{ji}$ para todos i,j.
   - es antisimétrica, pues .

   Observación. En las matrices antisimétricas los elementos de la diagonal principal son nulos.

   Ejercicios.

   1. Decide si el conjunto de las matrices antisimétricas $A\in M_{2x2}$ forman un subespacio vectorial de M_{2x2}. En caso afirmativo obtén una base de él.
      Solución.
   2.

5. **Regulares o invertibles**. Son las que tienen inversa respecto al producto de matrices. Es decir: A es regular si existe su inversa A^{-1} y por tanto: $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$.
   - su inversa es .

- su inversa es .

Ejercicios.

1. Aplica la definición para hallar la matriz inversa de:
   Solución. .
2. Demuestra que si A cumple que $A^2+2A=I$ entonces A es invertible.
   Solución. De $A\cdot(A+2I)=I$ se deduce que $A^{-1}=A+2I$.
3. Una matriz $A\in M_{2x2}$ verifica la ecuación $A^3+2A^2+I=(0)$. Hallar A^{-1}.
   Solución. $A^{-1}=-A^2-2A$.
4.

6. Singulares. Son las que no tienen inversa respecto al producto de matrices.

- y no tienen inversa.

7. Ortogonales. Son las matrices A tales que $A\cdot A^t=I$, es decir, $A^{-1}=A^t$.

- y son ortogonales. Compruébese.

Ejercicios.

1. Halla todas las matrices $A\in M_{2x2}$ ortogonales.
   Solución.
2. Halla todas las matrices $A\in M_{3x3}$ ortogonales.
   Solución.
3.

8. Idempotentes. Son las matrices A tales que $A^2=A$.

- y son idempotentes. Compruébese.

Ejercicios.

1. Halla todas las matrices $A\in M_{2x2}$ idempotentes.
   Solución.
2. Si A es una matriz idempotente, ¿cuánto vale $(2A-I)^2$?
   Solución. I.
3.

9. Involutivas. Son las matrices A tales que $A^2=I$.

- y son involutivas. Compruébese.

Ejercicios.

1. Halla todas las matrices $A\in M_{2x2}$ involutivas.
   Solución.
2.

8. MATRIZ TRASPUESTA. PROPIEDADES.

Matriz traspuesta de A. Es la que se obtiene a partir de A cambiando filas por columnas sin alterar su orden de colocación. La denotaremos por A^t.

Si $A=(a_{ij})$, $A^t=(a_{ji})$. Si A es de orden mxn, A^t será de orden nxm.

Propiedades

Consideremos las matrices A, B, A^t y B^t de órdenes adecuados a las propiedades que veamos.

1. **$(A^t)^t = A$.** Dem. Evidente.

2. **$(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$.** Dem. Evidente.

3. **$(A+B)^t = A^t + B^t$.**
Dem: Como $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ entonces $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$. $(A+B)^t=(a_{ji}+b_{ji})=(a_{ji})+(b_{ji})=A^t+B^t$.

4. **$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.**
Dem: Sean $A=(a_{ij})$ de orden mxn y $B=(b_{ij})$ de orden nxp. $C=A \cdot B=(c_{ij})$ será de orden mxp.
El elemento c_{ij} de $C=A \cdot B$ es como sabemos: $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{in} \cdot b_{nj}$.
Este elemento es también el elemento que está en la fila j y la columna i de la matriz $(A \cdot B)^t$, es decir, es el c_{ji} de $(A \cdot B)^t$.
Los elementos de la fila j de la matriz B^t son $b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{nj}$.
Los elementos de la columna i de la matriz A^t son $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$.
Por tanto, el elemento de la fila j y la columna i de $B^t \cdot A^t$ es: $b_{1j} \cdot a_{i1}+b_{2j} \cdot a_{i2}+...+b_{nj} \cdot a_{in}=c_{ji}$.
Luego $(A \cdot B)^t=B^t \cdot A^t$.

Ejercicios.

1. Sea . Encuentra una matriz cuadrada triangular B tal que $A=B \cdot B^t$. ¿Hay una sola?
Solución.
2. Demuestra que el producto de dos matrices ortogonales es otra matriz ortogonal.
Solución.
3. Si la matriz A es antisimétrica, ¿qué se puede decir de $B^t \cdot A \cdot B$?
Solución. $A=-A^t$ entonces $(B^t \cdot A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t \cdot B = -B^t \cdot A \cdot B$ es decir, es antisimétrica.
4. Si la matriz P es antisimétrica, ¿qué se puede decir de P^2, P^3 y P^4?
Solución. $P=-P^t \Rightarrow P^2 = P \cdot P = (-P^t) \cdot (-P^t) = (P^t)^2 = (P^2)^t \Rightarrow P^2$ es simétrica.
$P^3 = P^2 \cdot P = (P^2)^t \cdot P = -(P^3)^t \Rightarrow P^3$ es antisimétrica. Análogamente sale que P^4 es simétrica.
5. Demuestra que toda matriz cuadrada A es la suma de una matriz simétrica S y otra matriz antisimétrica T. Aplica este resultado a una matriz cualquiera 3x3.
Solución. $S=S^t$ y $T=-T^t$, $A=S+T$, $A^t=(S+T)^t=S^t+T^t \Rightarrow A^t=S-T$ Resolviendo el sistema: $S=½ \cdot (A+A^t)$ y $T=½ \cdot (A-A^t)$.

9. MATRICES INVERTIBLES. PROPIEDADES.

Una matriz A es **invertible o regular**, si tiene inversa respecto al producto de matrices. Es decir: A es invertible si existe su inversa A^{-1} y por tanto: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Propiedades

1. **Si A y B son matrices cuadradas de orden n tales que: $A \cdot B=I_n$, entonces $B=A^{-1}$ y $A=B^{-1}$.**
Dem. Multiplicando en $A \cdot B=I_n$ por A^{-1} y aplicando la propiedad asociativa se tiene que: $A^{-1} \cdot (A \cdot B)=A^{-1} \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot B=A^{-1} \Rightarrow B=A^{-1}$.
Análogamente: $(A \cdot B) \cdot B^{-1}=B^{-1} \Rightarrow A \cdot (B \cdot B^{-1})=B^{-1} \Rightarrow A=B^{-1}$.

2. **$(A^{-1})^{-1} = A$.** Dem. Evidente.

3. **$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.**
Dem. Hay que ver que: $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1})=I_n$.
Por la propiedad asociativa: $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1})=A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1}=A \cdot A^{-1}=I_n$.

4. **$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.**
Dem. Como $A \cdot A^{-1}=I_n$, tomando traspuestas resulta que: $(A^{-1})^t \cdot A^t=I_n$, luego, por la primera

propiedad $(A^{1})^t=(A^t)^{1}$.

Ejercicios.

1. Demuestra que la inversa de una matriz ortogonal es otra matriz ortogonal.
   Solución.
2. Demuestra que si la matriz A es simétrica, también lo es su inversa.
   Solución. Si A es simétrica $\Rightarrow$ $A=A^t$. Por otra parte $AA^{-1}=I$, tomando traspuestas en ambos miembros, se tiene: $(AA^{-1})^t=I^t$ $\Rightarrow$ $(A^{-1})^tA^t=I$ $\Rightarrow$ $(A^{-1})^tA=I$ $\Rightarrow$ $(A^{-1})^t=A^{-1}$ $\Rightarrow$ A^{-1} es simétrica.
3.

10. OPERACIONES CON MATRICES Y PROPIEDADES. RESUMEN.

Siendo:
+: Suma de matrices.
$\cdot_\lambda$: Producto de un número real por una matriz.
x: Producto de matrices.

(M_{mxn}, +) = Grupo conmutativo.
(M_{mxn}, +, $\cdot_\lambda$) = Espacio vectorial sobre R.
(M_{nxn}, x) = Semigrupo.
(M_{nxn}, +, x) = Anillo no conmutativo, unitario y con divisores de cero.
(M_{nxn} invertibles, x) = Grupo.

11. REPRESENTACIÓN DE UN VECTOR POR UNA MATRIZ.

Sea E un R-espacio vectorial de dimensión n y B={} una base de E.

A todo vector $\in$E, le podemos asociar una matriz fila formada por las coordenadas de en la base B, o también una matriz de una sola columna A^t que es la traspuesta de la anterior.

Recíprocamente, a toda matriz fila o a toda matriz columna, le podemos asociar un vector del espacio vectorial de dimensión n, cuyas coordenadas sean los elementos de la matriz fila o de la matriz columna.

- Al vector (2,3,4)$\in R^3$ le podemos asociar: la matriz fila o la matriz columna .
- A la matriz fila le podemos asociar el vector de R^3: (1,5,7).
- A la matriz columna le podemos asociar el vector de R^3: (6,0,8).

12. REPRESENTACIÓN DE UN CONJUNTO DE VECTORES POR UNA MATRIZ.

Sea E un R-espacio vectorial de dimensión n y B={} una base de E.

Sea S={} un conjunto de m vectores de E.

Podemos asociar a S la matriz A de orden mxn formada por las coordenadas de los vectores en la base B:

abreviadamente:

También podemos asignar a S la matriz A^t=() que está formada por las coordenadas de los vectores puestas en columna.

- A los vectores {(2,3,4), (1,0,5), (8,6,5), (7,9,4)}$\in R^3$ le podemos asociar las matrices: de orden 4x3, o la matriz de orden 3x4.

Recíprocamente: A toda matriz A de orden mxn le podemos asignar dos conjuntos de vectores:

1. {} que son m vectores de un espacio vectorial de dimensión n, donde las coordenadas de cada vector son los elementos de la fila i de la matriz A.

2. {} que son n vectores de un espacio vectorial de dimensión m, donde las coordenadas de cada vector son los elementos de la columna i de la matriz A.

● A la matriz le podemos asociar {(1,0,5,6), (2,3,4,7)} que son 2 vectores de R^3, o también {(1,2), (0,3), (5,4), (6,7)} que son 4 vectores de R^2.

13. RANGO DE UNA MATRIZ.

El concepto de rango es una de los conceptos más importantes del Algebra Lineal. Recordemos el concepto de rango de un conjunto de vectores.

Rango de un conjunto de vectores. Es el número de vectores linealmente independientes de dicho conjunto. Es decir: Es la dimensión del subespacio vectorial que generan.

Rango por filas de una matriz es el mayor número de vectores fila que sean linealmente independientes.

Rango por columnas de una matriz es el mayor número de vectores columna que son linealmente independientes.

● Sea . El rango por filas de A es 2 ya que los vectores fila (1,0,3) y (2,1, 1) son linealmente independientes y (3,1,2)=(1,0,3)+(2,1, 1).
El rango por columnas es también 2 ya que los vectores columna (1,2,3) y (0,1,1) son linealmente independientes y (3, 1,2)=3·(1,2,3)-7·(0,1,1).

El hecho de que coincidan el rango por filas y el rango por columnas en el ejemplo anterior, no es por casualidad; veremos más adelante que esta propiedad se verifica siempre, por lo cual podemos hablar simplemente de rango (o característica) de una matriz.

Se enuncia a continuación un teorema que permite conocer un método para calcular el rango de una matriz.

Teorema. El rango por filas (o por columnas) de una matriz A no varía si se sustituye una de ellas por una combinación lineal de todas, en la cual el coeficiente de la sustituida es distinto de cero.

Demostración

Vamos a hacerla para el rango por filas. Para ello consideremos las matrices A, B y C.

donde $(b_{11},b_{12},...,b_{1n}) = \alpha_1 \cdot (a_{11},a_{12},...,a_{1n}) + \alpha_2 \cdot (a_{21},a_{22},...,a_{2n}) + ... + \alpha_m \cdot (a_{m1},a_{m2},..., a_{mn})$ con $\alpha_1 \neq 0$ **(*)**

La matriz B se ha obtenido sustituyendo la fila 1 por una combianción lineal de ella y las demás. B es también de orden mxn.

La matriz C es de orden (m+1)xn y se obtiene a partir de A añadiéndole la fila m+1 que es combinación lineal de las m restantes.

Hay que demostrar que el rango por filas de A igual al rango por filas de B. r(A) = r(C) ya que la última fila de C es combinación lineal de las demás.

r(C) = r(B) ya que la primera fila de C es combinación lineal de las demás (basta despejar en **(*)**, ya que $\alpha_1 \neq 0$).

En consecuencia: r(A)=r(B). c.q.d. La demostración para el rango por columnas es similar.

Así, un método para calcular el rango de una matriz consiste en transformarla, mediante las operaciones indicadas en el teorema anterior, en una matriz "escalonada".

- Calculemos el rango de la matriz .
  = (a) = = (b) = = (c) = = 3.
  Si c_1, c_2, c_3 denotan las columnas, las igualdades anteriores se justifican:
  (a) Permutando c_1 y c_2 para conseguir que el elemento a_{11} sea la unidad.
  (b) Sustituimos c_2 por $(2)\cdot c_1+c_2$ y c_3 por $(3)\cdot c_1+c_3$.
  (c) Sustituimos c_3 por $(1)\cdot c_2+c_3$.

<u>Teorema</u>. El rango por filas y el rango por columnas de una matriz A son iguales.

<u>Demostración</u>

a) Vamos a hacerla para una matriz de orden 5x4 cuya cuarta columna depende linealmente de las tres primeras, que son linealmente independientes. Veremos que tiene, a lo sumo, tres filas linealmente independientes.

Si la 4ª columna, d, es combinación lineal de las tres primeras: $d=p\cdot a+q\cdot b+r\cdot c$

Sustituimos los elementos de la cuarta columna por su expresión en función de los elementos de las tres primeras.

La primera fila puede ponerse así: $a_1\cdot(1\ 0\ 0\ p)+b_1\cdot(0\ 1\ 0\ q)+c_1\cdot(0\ 0\ 1\ r)$.

Análogamente, la segunda fila: $a_2\cdot(1\ 0\ 0\ p)+b_2\cdot(0\ 1\ 0\ q)+c_2\cdot(0\ 0\ 1\ r)$.

Lo mismo las otras tres.

Las filas se pueden poner todas como combinación lineal de los vectores fila:

$$(1\ 0\ 0\ p),\quad (0\ 1\ 0\ q),\quad (0\ 0\ 1\ r)$$

Significa que sólo tres de las cinco filas, a lo sumo, serán linealmente independientes.

De la misma manera se probaría que el número de columnas linealmente independientes es menor o igual que el de filas. Luego coinciden.

b) Veámosla en general: Para ello consideramos una matriz arbitraria $A\in M_{mxn}$.

Sean $F_1, F_2, ..., F_m$ sus filas.

Supongamos que el rango por filas es r.

Sean $S_1=(b_{11}\ \ b_{12}\ \ ...\ \ b_{1n})$, $S_2=(b_{21}\ \ b_{22}\ \ ...\ \ b_{2n})$, ..., $S_r=(b_{r1}\ \ b_{r2}\ \ ...\ \ b_{rn})$ los r vectores de una base del espacio vectorial engendrado por los vectores fila:

Entonces cada uno de los vectores fila es combinación lineal de los S_i.

$F_1 = k_{11}\cdot S_1 + k_{12}\cdot S_2 + ... + k_{1r}\cdot S_r$

$F_2 = k_{21}\cdot S_1 + k_{22}\cdot S_2 + ... + k_{2r}\cdot S_r$

....

$F_m = k_{m1}\cdot S_1 + k_{m2}\cdot S_2 + ... + k_{mr}\cdot S_r$ donde los k_{ij} son escalares.

Igualando las componentes i-ésimas de cada una de las ecuaciones vectoriales anteriores, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones, válido para i=1,...n:

$a_{1i} = k_{11}\cdot b_{1i} + k_{12}\cdot b_{2i} + ... + k_{1r}\cdot b_{ri}$

$a_{2i} = k_{21}\cdot b_{1i} + k_{22}\cdot b_{2i} + ... + k_{2r}\cdot b_{ri}$

....

$a_{mi} = k_{m1}\cdot b_{1i} + k_{m2}\cdot b_{2i} + ... + k_{mr}\cdot b_{ri}$

Luego para i=1,...n: $= b_{1i}\cdot + b_{2i}\cdot + ... + b_{ri}\cdot$

Es decir, cada una de las columnas de A es una combinación lineal de los r vectores:

, , ...,

Luego el espacio vectorial engendrado por los vectores columna de la matriz A tiene dimensión a lo más r, esto es, el rango por columnas $\leq$ r.

Luego el rango por columnas $\leq$ el rango por filas.

Similarmente (o considerando la matriz traspuesta A^t) obtenemos que el rango por filas es menor que el rango por columnas.

Por tanto, el rango por filas y el rango por columnas son iguales. c.q.d.

14. MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL.

Consideremos una aplicación lineal $f \in L(E,F)$. Sea {} una base de E y {} una base de F.

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

. . . .

$\Rightarrow$

La matriz cuyas columnas están formadas por las coordenadas de los vectores , , ..., , es la **matriz asociada** a la aplicación lineal f respecto a las bases consideradas.

- Consideremos la aplicación lineal f de R^3 en R^2 definida por f(x,y,z)=(x+y,y+z).
  f(1,0,0)=(1,0) f(0,1,0)=(1,1) f(0,0,1)=(0,1)
  La matriz asociada a f respecto a las bases canónicas de R^3 y R^2 es: .

Recíprocamente. «Dada una matriz $A \in M_{mxn}$, existe una única aplicación lineal $f \in L(E,F)$ tal que A es la matriz asociada a f».

Demostración

Sea {} la base de E y {} la base de F.
Consideremos los vectores $\in$F, entonces:

. . . .

Sabemos que

Vamos a construir f con las condiciones de que , , ..., y ver que es lineal y única. Sea $\in$E $\Rightarrow$

Definimos: .

Veamos que la aplicación f así definida es lineal:
Si y $\Rightarrow$

= ..... = .
= ..... = . Luego f es lineal.

Como: f(1,0,...,0)=, f(0,1,...,0)=, ..., f(0,0,...,1)=, $\Rightarrow$ la matriz aso ciada a f es A.

Veamos que la aplicación f así definida es única:
Si existiera otra aplicación **g** que cumpla todas las condiciones anteriores , se tendrá que:
= = =
=

- Sea la matriz asociada a una aplicación lineal f de R^3 en R^2.
  La aplicación f que tiene como matriz asociada A, es: f(x,y,z)=(x+2y+3z, 4x+5y+6z).
  f(1,0,0)=(1,4) f(0,1,0)=(2,5) f(0,0,1)=(3,6)

15. APLICACIONES LINEALES Y OPERACIONES CON MATRICES.

En el apartado anterior hemos construido una aplicación **biyectiva** T entre L(E,F) y M_{mxn}, definida de la siguiente manera:

$$L(E,F) \xrightarrow{\quad T \quad} M_{mxn}$$
$$f \longrightarrow \text{Matriz asociada a } f$$

Esta aplicación T es además **lineal**, pues:

1. $T(f+g)=T(f)+T(g)$
2. $T(\lambda f)=\lambda T(f)$.

Luego T es un **isomorfismo**. Es decir, $L(E,F)$ y M_{mxn} son isomorfos.

A. MATRIZ ASOCIADA A LA COMPOSICIÓN DE APLICACIONES LINEALES.

Sean E, F, G espacios vectoriales sobre R; {}, {}, {} sus bases respectivas y sean $f\in L(E,F)$ y $g\in L(F,G)$.

«Si A es la matriz asociada a f y B la matriz asociada a g en las bases mencionadas, entonces, la matriz asociada a $g \circ f$ en las bases {}, {} es $B\cdot A$».

Demostración

....

Si hubiéramos definido el producto de dos matrices como la composición de ambas matrices pensadas como aplicaciones, no es necesario demostrar las propiedades del producto de matrices, ya que son simplemente las de la composición de aplicaciones, que ya conocemos.

Demostración de la propiedad asociativa del producto de matrices: Es obvia porque el producto de dos matrices es otra matriz asociada a la composición de dos aplicaciones lineales, y la composición de aplicaciones verifica la propiedad asociativa como sabemos.

Ejercicios.

1. Sea f un aplicación lineal de R^2 en R^3 definida por $f(x,y)=(2x, x+y, y)$ y sean $B=\{(1,1), (0,2)\}$ y $B'=\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ bases de R^2 y R^3 respectivamente. Halla la matriz asoc iada a f respecto a estas bases.
   Solución. .
2. Sea $f(x,y,z) = (2x, x+y, y, y-z)$ una aplicación lineal definida de R^3 en R^4.
   a) Comprueba que es lineal.
   b) Halla la matriz asociada a f en las bases canónicas.
   c) Matriz asociada a f considerando en R^3 la base $B=\{(1,0,0), (0,-1,1), (2,1,0)\}$ y en R^4 la canónica.
   Solución. b) . c) . .
3. Sean E, E' y E'' tres R-espacios vectoriales de dimensiones 2, 3 y 4 respectivamente. Sean f de E en E' y g de E' en E'' dos aplicaciones lineales que tienen por matrices asociadas y . Halla las ecuaciones de f, de g y la matriz asociada a .
   Solución. $f(x,y)=(0,y,x)$. $g(x,y,z)=(x+z, y+z, z, z)$. .
4. Sea f una aplicación lineal con matriz asociada en la base . Halla su matriz en la base donde .
   Solución.
5. Calcula las ecuaciones de la aplicación lineal definida por la matriz . Halla la imagen de

(5,3,-2).
Solución. f(5,3,-2)=(-1,8,8,2).

6. Sea la matriz asociada a una aplicación lineal de R^2 en R^2 en la base . Calcula la matriz de dicha aplicación en la base donde .
Solución.

16. EJERCICIOS.

1. Escribe una matriz de cada uno de los siguientes tipos: a) triangular. b) diagonal. c) escalonada por filas.
Solución.
2. Halla x e y para que la matriz cumpla que $A^2+x\cdot A+y\cdot I=(0)$.
Solución.
3. Halla todas las matrices que conmutan con . ¿Forman un subespacio vectorial de M_{2x2}?
Solución. . Sí.
4. Demuestra que las matrices $X\in M_{2x2}$ que conmuten con forman un subespacio vectorial de M_{2x2}. Encuentra una base del mismo.
Solución. .
5. Halla todas las matrices que conmutan con .
Solución. Si b=0, todas. Si $b\neq 0$.
6. Siendo , hallar las matrices $B\neq(0)\in M_{2x2}$ tales que $A\cdot B=(0)$ y obtener el valor de x para que exista solución.
Solución. , x=6.
7. Demuestra que si $A\in M_{2x2}$ conmuta con las 4 matrices de la base canónica, entonces, A conmuta también con toda matriz de M_{2x2}.
Solución. La matriz A, por conmutar con las de la base canónica, es de la forma . Conmuta con . Compruébese.
8.

17. PROBLEMAS.

1. En la sala de un hospital dedicado al tratamiento de diabéticos se administra insulina de tres clases: semilenta, lenta y ultralenta. El número de unidades diarias que se aplica a los pacientes de los cinco ingresados viene dado por la siguiente tabla:

	Pac. 1	Pac. 2	Pac. 3	Pac. 4	Pac. 5
Semilen ta	15	15	20	30	10
Lenta	20	20	15	5	20
Ultralen ta	10	5	10	10	15

El número de días que ha estado internado cada paciente es:

	Pac. 1	Pac. 2	Pac. 3	Pac. 4	Pac. 5
Nº de días	3	7	5	12	20

Calcula, con ayuda del producto de matrices, las unidades de cada clase que le fue administrada a los pacientes.

Solución. La matriz de necesidades diarias es: .
La matriz columna que expresa el número de días es: .
Para hallar el número de unidades de cada clase administradas a los pacientes calculemos:
$A \cdot D = \cdot = .$

2. En un hospital oncológico se aplica a un grupo de cuatro pacientes un tratamiento de quimioterapia mediante un protocolo CMF (C=ciclofosfamida, M=metrotexate, F=5-fluoracilo). Las cantidades diarias que necesita cada paciente de cada uno de los compuestos varían según la superficie total corporal, del siguiente modo:
Paciente 1: 1200 mg de C, 80 mg de M y 1200 mg de F.
Paciente 2: 900 mg de C, 60 mg de M y 950 mg de F.
Paciente 3: 1100 mg de C, 70 mg de M y 1000 mg de F.
Paciente 4: 1150 mg de C, 80 mg de M y 1100 mg de F.
Teniendo en cuenta que el tratamiento se va a aplicar durante tres semanas a los pacientes 1, 3 y 4 y dos semanas al paciente 2, hallar la matriz de necesidades diarias y las cantidades de cada compuesto necesarias para poder atender correctamente los tratamientos de los cuatro pacientes.

Solución. La matriz de necesidades diarias es:

	Pac. 1	Pac. 2	Pac. 3	Pac. 4
Ciclofos famida	1200	900	1100	1150
Metrote xate	80	60	70	80
5-fluora cilo	1200	950	1000	1100

Si representamos por D el vector columna que expresa el número de días que cada paciente debe seguir el tratamiento, se tiene:

Las necesidades totales de cada compuesto se obtienen multiplicando la matriz A por la D:

$A \cdot D = \; =$

Así pues, se necesitan: 85.050 mg de ciclofosfamida, 5.670 de metrotexate y 82.600 mg de 5-fluoracilo.

3. Demuestra que si dos matrices invertibles A y B conmutan, entonces: a) También conmutan A^{-1} y B, B^{-1} y A, A^{-1} y B^{-1}. b) Si además A y B son simétricas, $A^{-1}\cdot B$, $A\cdot B^{-1}$ y $A^{-1}\cdot B^{-1}$ también son simétricas.

<u>Solución</u>. a) $A\cdot B=B\cdot A \Rightarrow B\cdot A\cdot A^{-1}=A\cdot B\cdot A^{-1}=B \Rightarrow A^{-1}\cdot B=(A^{-1}\cdot A)\cdot B\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}$

Análogamente $A=B\cdot A\cdot B^{-1} \Rightarrow B^{-1}\cdot A=(B^{-1}\cdot B)\cdot A\cdot B^{-1}=A\cdot B^{-1}$

$A\cdot B=B\cdot A$ tomando inversas: $(A\cdot B)^{-1}=(B\cdot A)^{-1} \Rightarrow B^{-1}\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot B^{-1}$

b) $A=A^t$ y $B=B^t \Rightarrow A^{-1}\cdot B=B\cdot A^{-1}=B^t\cdot (A^t)^{-1}=B^t\cdot (A^{-1})^t=(A^{-1}\cdot B)^t$

$B^{-1}\cdot A=(B^t)^{-1}\cdot A^t=(B^{-1})^t\cdot A^t=(A\cdot B^{-1})^t$

Finalmente: $A^{-1}\cdot B^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}=(B^t)^{-1}\cdot (A^t)^{-1}=(B^{-1})^t\cdot (A^{-1})^t=(A^{-1}\cdot B^{-1})^t$

4.

18. EJERCICIOS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD.

1. Escribe explícitamente la matriz cuyos términos son: $a_{ij} = (i\text{-}j\ 1)^3$, $i,j=1,2,3$.
   Solución. .
2. Determina a y b para que las siguientes matrices sean linealmente dependientes.
   , , .
   Solución. a=11, b=9, x=2, y=-3.
3. Halla la matriz X que cumpla $X \cdot A+B=C$, siendo:
   , , .
   Solución. .
4. Halla la matriz X que cumpla $A \cdot X \cdot B+C=D$, siendo:
   , , , .
   Solución. .
5. Prueba que $A^n=2^{n\ 1}A$, siendo .
   Solución.
6. Halla todas las matrices X que satisfacen la ecuación: $\cdot X =$.
   Solución. .
7. Siendo , se pide:
   a) Halla la matriz: $3 \cdot A^t \cdot A - 2 \cdot I_2$.
   b) Resuelve la siguiente igualdad matricial: $A \cdot X=$.
   Solución. a) . b) .
8. Halla todas las matrices X que cumplan: $X \cdot = \cdot X$.
   Solución. .