

Тема уроку: Похідна показникової функції.

I. Перевірка домашнього завдання.

II. Актуалізація опорних знань учнів.

$$1) y' = ((1 + \sin x)^2)' = 2(1 + \sin x) \cdot (1 + \sin x)' = 2(1 + \sin x) \cdot \cos x;$$

$$2) y' = (\sqrt{\cos x})' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}};$$

$$3) y' = (\operatorname{ctg}^3 x)' = 3\operatorname{ctg}^2 x \cdot (\operatorname{ctg} x)' = 3\operatorname{ctg}^2 x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{3\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{3\cos^2 x}{\sin^4 x}.$$

$$4) y' = \left(5\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right)' = 5 \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' + \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right)' = 5 \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)' + 0 = \frac{5}{2\cos^2 \frac{x}{2}}.$$

5) Виконання усних вправ.

Знайдіть похідні функцій, які подано в таблиці 7.

Таблиця 7

	1	2	3	4
1	$y = (2x + 1)^3$	$y = (1 - 3x)^5$	$y = \sqrt{x - 2}$	$y = \frac{1}{3x + 1}$
2	$y = \cos^2 x + \sin^2 x$	$y = \cos 3x$	$y = \cos^2 x$	$y = \sin \frac{x}{2}$
3	$y = \sqrt{\sin x}$	$y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$	$y = \frac{1}{(x - 3)^2}$	$y = \operatorname{tg} 2x$
4	$y = \cos^3 x$	$y = \sqrt{\sin 2x}$	$y = \sin^2 x^3$	$y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$

III. Сприймання і усвідомлення матеріалу про похідну показникової функції.

Перш ніж знаходити похідну показникової функції, зробимо два важливих зауваження. Графік функції $y = a^x$ проходить через точку $(0; 1)$. Нехай α — величина кута, утвореного дотичною до графіка функції $y = a^x$ в точці $(0; 1)$ з додатним напрямом осі абсцис. Величина цього кута залежить від значення основи a . Наприклад, обчислено, що при $a = 2$ величина кута α приблизно дорівнює 34° (рис. 29), а при $a = e$, $\alpha = 47^\circ$ (рис. 30).

Якщо основа a показникової функції $y = a^x$ зростає від 2 до 3, то величина кута α зростає і приймає значення від 34° до 47° . Отже, існує таке значення a , при якому дотична, проведена до графіка функції $y = a^x$ в точці $(0; 1)$ утворює з додатним напрямом осі ОХ кут 45° (рис. 31). Таке значення a прийнято позначати буквою e , e — число ірраціональне, $e = 2,718281828459\dots$

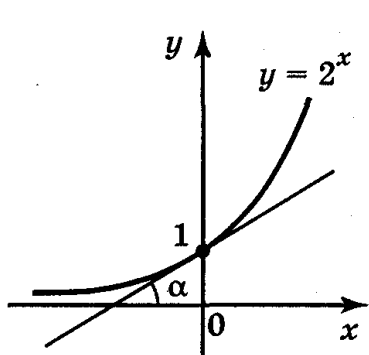


Рис. 29

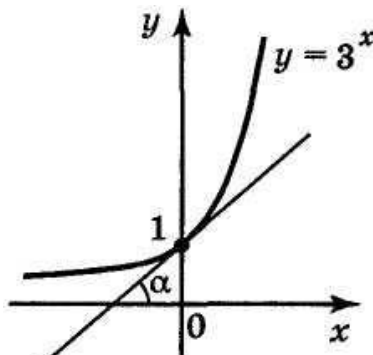


Рис. 30

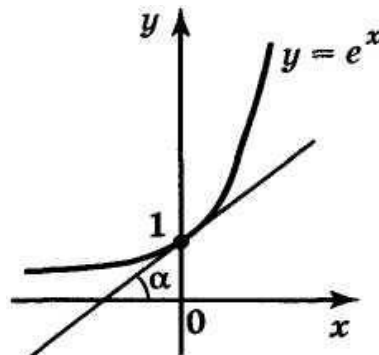


Рис. 31

Таким чином, дотична до графіка функції $y = e^x$ в точці $(0; 1)$ утворює з додатним напрямом осі абсцис кут, який дорівнює 45° .

У відповідності з геометричним змістом похідної даний висновок означає, що значення похідної функції $f(x) = e^x$ в точці $x = 0$ дорівнює $\tan 45^\circ = 1$.

$$\text{Отже, } f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - e^0}{\Delta x} = 1.$$

Знайдемо тепер формулу похідної функції $f(x) = e^x$.

Нехай аргумент x_0 одержав приріст Δx , тоді:

$$1) \Delta f = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1)$$

$$2) \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$3) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$$

Таким чином, похідна функції e^x дорівнює самій функції:

$$(e^x)' = e^x.$$

Знайдемо похідну функції $f(x) = a^x$, скориставшись основною логарифмічною тотожністю та правилом знаходження похідної складеної функції: $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = (e^{x \ln a}) \cdot (x \ln a)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$. Отже,

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

Похідна показникової функції дорівнює добутку цієї функції на натуральний логарифм її основи.

Знайдіть похідні функцій:

$$a) y = 5^x; \quad б) y = e^{3-2x}; \quad в) y = (0,3)^{\sin x}; \quad г) y = 5^{x^2+2x+3}.$$

Розв'язання

$$a) y' = (5^x)' = 5^x \ln 5;$$

$$б) y' = (e^{3-2x})' = e^{3-2x} \cdot (3-2x)' = -2e^{3-2x};$$

$$в) y' = ((0,3)^{\sin x})' = (0,3)^{\sin x} \ln 0,3 \cdot (\sin x)' = (0,3)^{\sin x} \ln 0,3 \cdot \cos x = \ln 0,3 \cos x (0,3)^{\sin x};$$

$$г) y' = (5^{x^2+2x+3})' = 5^{x^2+2x+3} \cdot \ln 5 \cdot (x^2+2x+3)' = 5^{x^2+2x+3} \ln 5 \cdot (2x+2) =$$

$$= 2 \ln 5(x+1) 5^{x^2+2x+3}.$$

IV. Підведення підсумків уроку.