Câu 48. **[2D3-2.1-4] (THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương n thỏa mãn $\int_0^2 \left(1-n^2+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}\right)\mathrm{d}x=-2$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\int_0^2 \left(1-n^2+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}\right)\mathrm{d}x=-2 \Leftrightarrow \left(x-n^2x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n\right)\Big|_0^2=-2$

$\Leftrightarrow 2-2n^2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^n=-2 \Leftrightarrow 1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=n^2+1$

$\Leftrightarrow 2^n-1=n^2+1 \Leftrightarrow 2^n-n^2-2=0$.

Thử với các giá trị $n\in\{1;2;3;4\}$ đều không thỏa mãn.

Với $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 5$ ta chứng minh $2^n>n^2+2$ (1). Dễ thấy $n=5$ thì (1) đúng.

Giả sử (1) đúng với $n=k$ với $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 5$. Khi đó $2^k>k^2+2$.

Khi đó: $2^{k+1}>2\left(k^2+2\right)=k^2+k^2+2+2>k^2+2k+1+2=\left(k+1\right)^2+2$.

Do đó (1) đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lý quy nạp thì (1) đúng.

Vậy không tồn tại số nguyên n.