

CENTRALE 2000 PSI 2

I. A- 1) Un segment $[AB]$ est l'ensemble des combinaisons convexes de A et de B . Mais toute combinaison convexe de combinaisons convexes de A et de B est encore une combinaison convexe de A et de B . Donc le segment $[AB]$ est convexe.

I. A- 2) Soient $M_1, M_2, \dots, M_p$ p points du demi-plan fermé F et $\lambda_1, \lambda_2, K, \lambda_p$ p réels positifs ou nuls de somme

1. Alors $\rightarrow \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{OM_i}{U} \right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i a = a \rightarrow$. Donc F est convexe. Le raisonnement est le même pour un demi-plan ouvert en remplaçant l'inégalité large par une inégalité stricte.

I. A- 3) Soient $M_1, M_2, \dots, M_p$ p points de C et $\lambda_1, \lambda_2, K, \lambda_p$ p réels positifs ou nuls de somme 1. Alors pour tout

α dans A , $\sum_{i=1}^p \lambda_i M_i$ est un point de C_α , d'où $\sum_{i=1}^p \lambda_i M_i \in C$. Donc C est convexe.

I. B- Une combinaison convexe d'un point unique M_1 ne peut être que ce point lui-même. L'hypothèse de récurrence est donc triviale pour $p = 1$.

Supposons qu'elle soit vraie au rang $p - 1$; soient $M_1, M_2, \dots, M_p$ p points de C et $\lambda_1, \lambda_2, K, \lambda_p$ p réels

positifs ou nuls de somme 1. L'associativité du barycentre donne l'égalité
$$\sum_{i=1}^p \lambda_i M_i = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \cdot \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i} M_i + \lambda_p M_p.$$

Par hypothèse de récurrence, $N = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i} M_i$ est dans C et comme le segment $[NM_p]$ est dans C , $\sum_{i=1}^p \lambda_i M_i$ est

encore dans C . D'où le résultat.

I. C- 1) Le point $N = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3} M_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} M_3$ est un point de la droite $M_2 M_3$ et M est barycentre de M_1 et M pondérés par λ_1 et $\lambda_2 + \lambda_3$. Pour que M soit dans F_1 il faut et il suffit que M soit dans le segment $[M_1 N]$, c'est à dire $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 + \lambda_3 \geq 0$ ou dans la demi-droite issue de M_1 ne contenant pas N , c'est à dire $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_2 + \lambda_3 \leq 0$. Globalement, $M \in F_1$ si $\lambda_1 \geq 0$.

D'où $M \in \text{Conv}(M_1, M_2, M_3)$.

I. C- 2) Un point du triangle $\text{Conv}(M_1, M_2, M_3)$ distinct de M_1 est tel que l'un au moins des coefficients λ_2 ou λ_3 est non nul. Une combinaison convexe de tels points vérifie encore cette propriété puisque tous ses coefficients sont positifs.

I. D- Une application affine f conserve le barycentre, donc les combinaisons convexes ; si de plus c'est une bijection, l'image d'une partie finie $\{M_1, M_2, \dots, M_p\}$ est une partie finie $\{f(M_1), f(M_2), \dots, f(M_p)\}$ de même cardinal. Donc l'image d'un polytope est un polytope.

I. E- 1) T est borné puisque contenu dans l'hypercube fermé $[0,1]^p$. De plus, T est l'intersection de cet hypercube fermé avec l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ qui est lui aussi un fermé. Donc T est fermé et borné :

c'est un compact.

I. E- 2) f est continue car chaque fonction coordonnée est une fonction polynomiale des variables $\lambda_1, \lambda_2, K, \lambda_p$.

I. E- 3) Le polytope $\text{Conv}(M_1, M_2, \dots, M_p)$ est l'image du compact T par l'application continue f . C'est donc un compact.

I. E- 4) L'intersection d'une droite D et d'un polygone convexe P de $\mathbb{R}^2$ est donc un fermé (intersection de deux fermés) borné (contenu dans P), donc compact.

Par ailleurs, c'est un convexe (cf. : **A- 3**). Or un convexe compact S sur une droite est un segment. En effet, si on note a et b la borne supérieure et la borne inférieure des abscisses (comptées sur la droite) des points de S (elles existent puisque S est borné), les points A et B correspondants sont dans S (car S est fermé) d'où $S \subset [AB]$ (car S est convexe) et finalement $S = [AB]$ (avec éventuellement $A = B$).

I. F- 1) Si P n'est pas réduit à M_1 , $P \setminus \{M_1\}$ est contenu dans le demi-plan ouvert F_0 et $P \setminus \{M_1\} = P \cap F_0$ qui est convexe d'après **A- 3**. Donc M_1 est extrémal.

I. F- 2) Soit $P = \text{Conv}(M_1, M_2, \dots, M_p)$ et $M \in P$ distinct de chacun des points M_i . Alors $P \setminus M$ contient $M_1, M_2, \dots, M_p$, donc n'est pas stable par combinaison convexe. Donc seuls les points $M_1, M_2, \dots, M_p$ peuvent être extrémaux.

I. F- 3) Pour $n = 2$, la courbe est une parabole.

Soit $M = \sum_{j=1}^p \lambda_j M(t_j)$ un point de P . Alors, pour tout i ,

$$\rightarrow t_i^2 - \left(\frac{OM}{U_i}\right) = \left(\sum_{j=1}^p \lambda_j\right) t_i^2 - 2t_i \left(\sum_{j=1}^p \lambda_j t_j\right) + \sum_{j=1}^p \lambda_j t_j^2 = \sum_{j=1}^p \lambda_j (t_j - t_i)^2 \rightarrow 0$$

et cette quantité ne peut s'annuler que si tous les termes sont nuls, d'où $\lambda_j = 0 \forall j \neq i$, c'est à dire $M = M_i$.

Donc M_i est pour tout i un point extrémal ; d'après 2, ce sont les seuls.

II. A- 1) Supposons que f est IR -linéaire représentée dans la base canonique par la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$. Alors

$$f(z) = (ax + by) + i(cx + dy) = a \frac{z+z^-}{2} + b \frac{z-z^-}{2} + i \left(c \frac{z+z^-}{2} + d \frac{z-z^-}{2} \right) = \frac{a+d+i(c-b)}{2} z + \frac{a-d+i(c+b)}{2} z^-$$

Inversement, si $f(z) = \alpha z + \beta z^-$, f est IR -linéaire représentée par la matrice $\begin{pmatrix} Re(\alpha + \beta) & Im(\beta - \alpha) & Im(\alpha + \beta) & Re(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$.

II. A- 2) $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = \frac{(a+d)^2 + (c-b)^2}{4} - \frac{(a-d)^2 + (c+b)^2}{4} = ad - bc = \det f$. Donc f est un automorphisme ssi $|\alpha|^2 \neq |\beta|^2$.

II. A- 3) La matrice de la réflexion vectorielle considérée est $\begin{pmatrix} \cos 2J & \sin 2J & \sin 2J & -\cos 2J \end{pmatrix}$, d'où $\alpha = 0$ et $\beta = e^{2iJ}$.

II. B- 1) H est défini comme le noyau de la forme linéaire (manifestement non nulle) $\left(z_1, Kz_p \right) az_1 + K + z_p$. C'est donc un hyperplan vectoriel.

II. B- 2) $y^p = id$. Donc y annule le polynôme à racines simples $X^p - 1$, ce qui prouve que y est diagonalisable (le corps de base étant IC , tout polynôme est scindé).

$y(\Omega_k) = w^k \Omega_k$. Donc Ω_k est un vecteur propre de y associé à la valeur propre w^k . Comme les $w^k, k \in [0, p-1]$ sont distincts, les Ω_k constituent une base propre pour y .

II. B- 3) Pour $k \neq 0$, Ω_k est dans H . Donc $\{\Omega_1, K, \Omega_{p-1}\}$ est une base de H .

II. C- 1) Puisque V est dans H , il existe $(\lambda_1, K, \lambda_{p-1})$ unique tel que $V = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \Omega_k$.

II. C- 2) Calculons les produits scalaires (hilbertiens complexes) de chaque vecteur Ω_k par le vecteur

$$W = \left(1, w, K, w^{p-1} \right) : \text{il s'écrit } \{ \}. \text{ On en déduit que } \lambda_1 = \frac{1}{p} \left(\frac{W}{V} \right) = \frac{1}{p} \sum_{r=1}^p w^{1-r} a_r.$$

En calculant de même les produits scalaires avec le vecteur $W' = \left(1, \frac{1}{w}, K, \frac{1}{w^{p-1}} \right)$, on trouve

$$\lambda_{p-1} = \frac{1}{p} (W'/V) = \frac{1}{p} \sum_{r=1}^p w^{r-1} a_r.$$

$$\text{II. C- 3)} \quad \sum_{r=1}^p \alpha_r = Im \sum_{r=1}^p e^{i(r-1)\frac{2\pi}{p} - i\frac{J}{2}} = Im \left(e^{-i\frac{J}{2}} \right) \sum_{r=1}^p w^{r-1} = 0.$$

Ecrivons $\alpha_r = \frac{1}{2i} \left(e^{-i\frac{J}{2}} w^{r-1} - e^{i\frac{J}{2}} w^{1-r} \right)$. Alors

$$\sum_{r=1}^p a_r \alpha_r = \left(\frac{1}{2i} e^{i\frac{J}{2}} W'/V \right) - \left(\frac{1}{2i} e^{-i\frac{J}{2}} \frac{W}{V} \right) = \frac{p}{2i} \left(\lambda_p e^{-i\frac{J}{2}} - \lambda_1 e^{i\frac{J}{2}} \right) = 0.$$

III. A- 1) Pour toute droite d_1 de IR^2 , il existe une rotation qui envoie $d(0)$ sur d_1 .

Pour tout couple (d_1, d_2) , on peut définir une application linéaire qui envoie les vecteurs de la base canonique sur des vecteurs directeurs de d_1 et d_2 respectivement, c'est à dire $d(0)$ et $d(\frac{p}{2})$ sur d_1 et d_2 .

III. A- 2) Soient d_1, d_2 et d_3 trois droites deux à deux distinctes engendrées par U_1, U_2 et U_3 respectivement. On peut écrire $U_2 = \alpha U_1 + \beta U_3$. Notons (e_1, e_2) la base canonique et définissons l'application

linéaire f par $\{ \}$. Alors $f\left(\frac{e_1 + \sqrt{3}e_2}{2}\right) = U_2$ et l'application f envoie bien $d(0), d(\frac{p}{3})$ et $d(\frac{2p}{3})$ sur d_1, d_2 et d_3 respectivement.

III. B- 1) Chaque vecteur U_j est défini au produit près par un scalaire non nul. De par la multilinéarité de $\det$, cette multiplication ne modifie pas $\mathcal{R}$.

III. B- 2) $\mathcal{R}(f(F)) = \frac{\det(f(U_1)f(U_3))\det(f(U_2)f(U_4))}{\det(f(U_1)f(U_4))\det(f(U_2)f(U_3))}$. Or $\det(f(U)f(V)) = \det f \det(UV)$; on peut donc simplifier par $(\det f)^2$ (on rappelle que $\det f \neq 0$) d'où $\mathcal{R}(f(F)) = \mathcal{R}(F)$.

III. C- 1) $\cos kJ = \operatorname{Re} e^{ikJ} = \operatorname{Re}(\cos J + i \sin J)^k = \sum_{0 \leq k \leq p/2} (k \ 2p) \cos^{k-2p} J (1 - \cos^2 J)^p$ qui est bien un polynôme en $\cos J$ à coefficients entiers.

III. C- 2) $\mathcal{R}(\mathcal{D}) = \mathcal{R}(f^{-1}(\mathcal{D})) = \frac{|\cos J_1 \cos J_3 \sin J_1 \sin J_3| |\cos J_2 \cos J_4 \sin J_2 \sin J_4|}{|\cos J_1 \cos J_4 \sin J_1 \sin J_4| |\cos J_2 \cos J_3 \sin J_2 \sin J_3|} = \frac{\sin(J_3 - J_1) \sin(J_4 - J_2)}{\sin(J_4 - J_1) \sin(J_3 - J_2)} = \frac{\cos(J_3 - J_1 - J_4 + J_2)}{\cos(J_4 - J_1 - J_3 + J_2)}$ où les J_j sont les angles polaires de quatre des droites de $f^1(F)$, c'est à dire de la forme $k_j \frac{p}{p}$. D'où $\mathcal{R}(\mathcal{D}) = \frac{\cos((k_3 - k_1 - k_4 + k_2) \frac{p}{p})}{\cos((k_4 - k_1 - k_3 + k_2) \frac{p}{p})} = \frac{T_{k'}(\cos p)}{T_{k''}(\cos p)} = G(\cos p)$.

Notons j_j l'angle polaire de d_j et supposons que $j_1 = 0, j_2 = p/4$ et $j_3 = p/2$. Alors $\mathcal{R}(\mathcal{D}) = \frac{\cos(p/2 - j_4 - \frac{p}{4})}{\cos(j_4 - p/2 + \frac{p}{4})} = \tan(J_4 - \frac{p}{4})$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{E}$. On peut trouver J_4 tel que $\tan(J_4 - \frac{p}{4}) = x$. Alors aucune famille de p droite contenant les droites d_j ($1 \leq j \leq 4$) ne peut être p -rationnelle.

IV. A- En notant z l'angle polaire du point courant, D_{j_x}

a pour équation polaire $\rho = \frac{x}{\cos(z - j - p/2)} = \frac{x}{\sin(z - j)}$.

IV. B- 1) Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont $d(J)$ -identifiables, alors, pour tout x réel, $l(D_{j_x} \mathcal{C} \mathcal{P}) = l(D_{j_x} \mathcal{C} \mathcal{P}')$. Si deux segments d'une même droite sont de même longueur, leurs images par une bijection affine sont de même longueur, d'où $l(f(D_{j_x}) \mathcal{C} f(\mathcal{P})) = l(f(D_{j_x}) \mathcal{C} f(\mathcal{P}'))$. $f(D_{j_x})$ est une droite qui reste dirigée par $j(d(J))$ et, quand x décrit $\mathbb{R}$, le point $x e^{ij}$ décrit la droite $d(J + p/2)$ et son image décrit donc $j(d(J + p/2))$. Comme j est une bijection, cette droite n'est pas identique à $j(d(J))$ et par conséquent, $f(D_{j_x})$ balaie tout le plan. Donc $f(\mathcal{P})$ et $f(\mathcal{P}')$ sont $j(d(J))$ -identifiables.

IV. B- 2) La réflexion affine s_q envoie un point d'argument z sur le point d'argument $z' = (2q - 1) \frac{p}{p} - z$. Il est alors clair que si z est un multiple pair de $\frac{p}{p}$, z' est un multiple impair et inversement. Les deux ensembles $\{A_1, K, A_p\}$ et $\{B_1, K, B_p\}$ sont donc globalement échangés, donc aussi $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ puisqu'une application affine conserve une combinaison convexe.

IV. B- 3) Par suite, les p droites vectorielles orthogonales aux droites $D_q, q = 1, K, p$ constituent une famille $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ soient $\mathcal{F}$ -identifiables.

IV. B- 4) Si $\mathcal{G}$ est une famille p -rationnelle, $\mathcal{G}$ est l'image par une application affine des droites $d(q \frac{p}{m}), q = 0, K, m - 1$, droites que l'on peut faire tourner d'un angle $\frac{p}{2m} + \frac{p}{2}$ pour se retrouver dans la situation des droites D_q orthogonales aux droites D_q de la question 3). Si f' est la bijection affine telle que $f'(\{D_1', K, D_m'\}) = \mathcal{G}$, alors $Q = f'(\mathcal{P})$ et $Q' = f'(\mathcal{P}')$ sont $\mathcal{G}$ -identifiables et distincts.

IV. C- Par construction, d'après **III. C- 3)**, $\mathcal{D}$ n'est pas extraite d'une famille p -rationnelle. Il ne peut donc exister deux polygones convexes distincts $\mathcal{D}$ -identifiables. Donc $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.